

贝叶斯与乘法

小圆滚滚

你问的是：在贝叶斯公式中，为什么“先验概率”与“似然”之间是**相乘**的关系，而不是相加或其他操作？这个问题本质上是关于**概率论中联合概率的定义与分解方式**。

1 贝叶斯公式为什么是乘法

1.1 一、从**联合概率**出发：乘法是天生的

贝叶斯公式的核心是一个**联合概率的分解**：

$$P(A, B) = P(A|B)P(B)$$

这个公式**不是推导出来的**，而是**概率论对“联合事件”的定义方式**。换句话说：**“A 和 B 同时发生”的概率，被定义为“在 B 发生的条件下 A 发生的概率”乘以“B 发生的概率”。**

这个定义背后，是概率论对“事件组合”的**乘法原理**（Multiplication Rule）。因此，**乘法不是贝叶斯公式的特殊选择，而是概率论对“联合事件”的基本定义方式**。

1.2 二、从**频率解释**看：乘法对应“事件序列”的计数

我们可以从**频率学派**的角度，用**计数**来理解为什么是乘法。

假设有一个样本空间，总共有 N 个等可能的样本点：

- 事件 B 发生了 N_B 次；
- 在 B 发生的这些次中，事件 A 又发生了 N_{AB} 次。

那么：

- $P(B) = \frac{N_B}{N}$
- $P(A|B) = \frac{N_{AB}}{N_B}$
- $P(A, B) = \frac{N_{AB}}{N}$

显然：

$$P(A, B) = \frac{N_{AB}}{N} = \frac{N_{AB}}{N_B} \cdot \frac{N_B}{N} = P(A|B)P(B)$$

乘法在这里，本质上是“两步事件”的计数规则：

先选 B 的样本点，再在其中选 A 的样本点，因此两个比例相乘。

1.3 三、从**逻辑解释**看：乘法对应“逻辑与”的约束强度

在**逻辑概率**（如 Cox 定理）框架中，概率是**对命题可信度的度量**。Cox 定理证明：只要满足几个关于“合理推理”的公理（如一致性、非矛盾性），则“可信度”必须服从概率论的规则，其中：

“命题 A 与命题 B 同时为真”的可信度，等于“在 B 为真的条件下 A 为真的可信度”乘以“B 为真的可信度”。

这里的乘法，**不是人为选择，而是逻辑一致性要求的必然结果**。

换句话说：**如果你希望“推理系统”不自相矛盾，那么“联合命题”的可信度就必须用乘法来组合。****

1.4 四、为什么**不是加法**？

加法在概率论中，对应的是**互斥事件的“或”运算**：

$$P(A \text{ 或 } B) = P(A) + P(B) - P(A, B)$$

而**联合事件**是“**同时发生**”，不是“**要么 A 要么 B**”，因此**加法不适用**。

乘法对应“与”，加法对应“或”，这是概率论的基本语义。

1.5 五、总结：乘法是天生的，不是贝叶斯的特殊选择

解释角度	为什么乘法？
定义角度	联合概率的定义就是 $P(A, B) = P(A B)P(B)$ ，乘法是天生的。
频率角度	两步事件的计数规则，比例相乘。
逻辑角度	Cox 定理证明：逻辑一致性要求“联合命题”的可信度必须相乘。
语义角度	乘法对应“与”，加法对应“或”，联合事件是“与”。

1.6 一句话回答：

贝叶斯公式中的乘法，不是贝叶斯的特殊选择，而是概率论对“联合事件”的基本定义方式——“同时发生”的概率，必须用乘法来组合。**