

质量和能量的等价性

小圆滚滚

1 $E = mc^2$ 那么光子没有质量，0乘以任何数都等于0，为什么还有能量？

光子虽然没有静止质量，但它具有能量和动量，这并不与 $E = mc^2$ 矛盾，原因如下：

- ****完整的相对论能量公式****：爱因斯坦的质能方程应为 $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$ ，其中 E 是总能量， m 是物体的静止质量， p 是动量， c 是光速。对于有质量的物体，其静止质量 m 不为零，当物体的速度远小于光速时，动量 p 相对较小，此时 $E \approx mc^2$ ，即我们熟悉的质能方程形式。但对于光子这种没有静止质量的粒子，其能量主要由动量决定，其公式可简化为 $E = pc$ ，即光子的能量与它的动量成正比。
- ****光子的波动性****：光子是电磁波的量子化表现，具有波动性。根据量子力学中的关系式 $E = h\nu$ ，其中 E 是光子的能量， h 是普朗克常数， ν 是光子的频率。这表明光子的能量与其频率成正比，频率越高，能量越大。即使光子没有静止质量，只要它具有一定的频率，就会对应一定的能量。例如，伽马射线光子的频率极高，其能量可达几百千电子伏特甚至更高，尽管其静止质量为零，但依然具有很强的能量。
- ****光子的粒子性****：光子也表现出粒子性，它在与物质相互作用时，如光电效应、康普顿散射等过程中，会表现出粒子的特性，即具有一定的能量和动量。在光电效应中，光子将能量传递给电子，使电子从金属表面逸出；在康普顿散射中，光子与电子碰撞后，会将部分动量转移给电子，自身的动量和能量发生改变。这些现象都表明光子虽然没有静止质量，但确实具有能量和动量，能够参与物质的相互作用。
- ****相对论的解释****：从相对论的角度来看，光子始终以光速运动，其能量和动量是相互联系的。对于静止质量为零的粒子，相对论认为其能量和动量之间存在 $E = pc$ 的关系，这与光子的性质相符合。光子的能量虽然不是由静止质量直接决定，但它是相对论性粒子的一种重要特性，反映了光子在时空中的运动状态和与物质相互作用的能力。

2 动量不是等于mv吗？那么质量为0，动量p不也是0吗？

在经典力学中，动量确实等于物体的质量乘以速度，即 $p = mv$ ，但光子属于相对论性粒子，对其动量的计算需用相对论理论。以下是基于相对论的解释：

相对论中的动量公式

相对论中的动量公式为 $\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0 \vec{v}$ ，其中 m_0 是物体的静止质量， $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ 是洛伦兹因子。当物体速度远小于光速时，相对论动量趋近于经典动量。但光子以光速运动，其静止质量 $m_0 = 0$ ，若直接代入相对论动量公式，会出现 0 乘以无穷大的不定式，需进一步分析。

2.1 光子的动量公式推导

根据相对论能量公式 $E^2 = (m_0c^2)^2 + (pc)^2$ ，对于光子，其静止质量 $m_0 = 0$ ，故能量公式为 $E = pc$ ，即 $p = \frac{E}{c}$ 。此外，从光子的波粒二象性来看，其动量还可表示为 $p = \frac{h}{\lambda}$ ，其中 h 是普朗克常数， λ 是光子的波长。因 $hc = \lambda\nu$ ，其中 ν 是光子的频率，将 $\lambda = \frac{c}{\nu}$ 代入 $p = \frac{h}{\lambda}$ ，可得 $p = \frac{h\nu}{c} = \frac{E}{c}$ ，与相对论能量动量关系式结果一致。

2.2 光子有动量的原因

虽然光子的静止质量为零，但它具有能量和动量，这源于其运动的特性以及相对论效应。在相对论中，能量和动量是相互关联的，光子的能量和动量通过 $E = pc$ 联系在一起。当光子与物质相互作用时，如在康普顿散射中，光子将部分动量转移给电子，使电子获得动能，自身动量和能量发生改变，这证明了光子具有动量。

3 如何推导

在狭义相对论中，完整的质能关系式 $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$ 的推导涉及到相对论性能量-动量关系，它是通过以下步骤推导出来的：

3.1 四维动量的引入

在狭义相对论中，物理量常常被表示为四维形式，以便于在洛伦兹变换下保持不变。momentum-energy four-vector（动量-能量四矢量）是一个重要的四维量，它包含能量和动量分量。四维动量的定义为：

$$P^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right)$$

其中： E 是总能量 - \mathbf{p} 是三维动量向量 - c 是光速

3.2 洛伦兹不变量

相对论的一个核心概念是洛伦兹不变量，即在所有惯性参考系中保持不变的物理量。对于四维动量来说，它的平方是一个洛伦兹不变量。四维动量的平方定义为：

$$P^\mu P_\mu = \left(\frac{E}{c} \right)^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$$

其中 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$ 是三维动量的点积，表示为 $p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ 。

3.3 静止质量与洛伦兹不变量的关系

对于一个有静止质量的粒子，其四维动量的平方应该等于静止质量和光速的平方的某个组合。具体来说，对于静止的粒子（动量 $\mathbf{p} = 0$ ），其能量为静止能量 $E = mc^2$ 。因此，四维动量的平方在静止参考系中为：

$$P^\mu P_\mu = \left(\frac{mc^2}{c}\right)^2 - 0 = (mc)^2$$

由于四维动量的平方是一个洛伦兹不变量，它在所有参考系中都应该等于 $(mc)^2$ 。因此，在任意参考系中，我们有：

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = (mc)^2$$

3.4 整理得到质能关系式

将上述方程两边乘以 c^2 ，得到：

$$E^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2$$

进一步整理得到完整的质能关系式：

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$$

3.5 物理解释

- 当粒子静止时（动量 $p = 0$ ），方程简化为 $E = mc^2$ ，即静止能量。- 当粒子以速度 v 运动时，其动量 $p = \gamma mv$ （其中 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ 是洛伦兹因子），此时总能量包括静止能量和动能。对于低速运动（ $v \ll c$ ），动能可以近似为经典力学形式 $\frac{1}{2}mv^2$ ，而静止能量 mc^2 相对较大，但在核反应等高能物理过程中，静止能量的变化（质量亏损）会显著释放出能量。

这个推导过程展示了狭义相对论如何将能量和动量统一在一个四维框架中，并揭示了质量和能量的等价性。这个关系式是现代物理学的基石之一，广泛应用于粒子物理、核物理和宇宙学等领域。