

距离、长度是怎样通过度规张量定义的

小圆滚滚

1 距离、长度是怎样通过度规张量定义的

在黎曼几何中，距离和长度是通过度规张量（metric tensor）来定义的。度规张量是一个二阶协变张量，用于描述流形上的几何结构，包括距离、角度和面积等概念。

1.1 度规张量的定义

度规张量 $g_{\mu\nu}$ 是一个对称的二阶张量，其分量表示流形上任意两个切向量之间的内积。在 n 维流形上，度规张量可以表示为：

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

其中， g_{ij} 是度规张量的分量， dx^i 和 dx^j 是坐标基底的一阶形式。

1.2 距离的定义

在流形上，两点之间的距离可以通过度规张量来计算。对于一个无穷小的线段，其长度的平方 ds^2 可以表示为：

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

其中， dx^μ 和 dx^ν 是坐标的变化量。

对于一条曲线 C ，其长度 L 可以通过对曲线上的每一段无穷小线段的长度进行积分来计算：

$$L = \int_C \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

这个积分表示沿着曲线 C 的总长度。

1.3 举例

- **欧几里得空间**：在三维欧几里得空间中，度规张量是一个单位矩阵：

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因此，距离的平方为：

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

- ****球坐标系****: 在球坐标系中, 度规张量的形式为:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

因此, 距离的平方为:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

通过度规张量, 我们可以将距离的概念从欧几里得空间推广到更一般的黎曼流形, 包括弯曲的空间和时空。

2 逆变分量乘以协变基底等于什么

在张量分析中, 逆变分量 (contravariant components) 乘以协变基底 (covariant basis) 等于一个向量 (vector)。

具体来说, 假设我们有一个向量 $\mathbf{v}$, 其逆变分量表示为 v^i , 协变基底表示为 $\mathbf{e}_i$ 。那么, 向量 $\mathbf{v}$ 可以表示为:

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$$

这里, v^i 是向量 $\mathbf{v}$ 在基底 $\mathbf{e}_i$ 上的逆变分量, 而 $\mathbf{e}_i$ 是协变基底。通过将逆变分量与相应的协变基底相乘并求和, 我们得到了向量 $\mathbf{v}$ 的完整表示。

这个表达式展示了逆变分量和协变基底之间的关系, 以及它们如何组合成一个向量。在张量分析中, 这种组合是描述向量和张量的基本方式之一。

3 它为什么等于协变分量诚意逆变基底?

你的问题实际上涉及到张量分量与基底之间的转换关系。在张量分析中, 向量 (或张量) 可以用不同的分量和基底来表示, 具体取决于我们选择的坐标系和基底类型。逆变分量与协变基底的组合, 以及协变分量与逆变基底的组合, 都表示同一个向量, 但它们是从不同的视角来描述的。

3.1 逆变分量与协变基底

假设我们有一个向量 $\mathbf{v}$, 其逆变分量为 v^i , 协变基底为 $\mathbf{e}_i$ 。向量可以表示为:

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$$

3.2 协变分量与逆变基底

同样, 向量 $\mathbf{v}$ 也可以用协变分量 v_i 和逆变基底 $\mathbf{e}^i$ 来表示:

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}^i$$

3.3 为什么它们相等？

这两个表达式都表示同一个向量 $\mathbf{v}$ ，但它们使用了不同的分量和基底。这种等价性源于基底之间的对偶关系和分量之间的转换关系。

3.3.1 **基底之间的对偶关系**

逆变基底 $\mathbf{e}^i$ 和协变基底 $\mathbf{e}_i$ 之间存在对偶关系：

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i$$

其中， δ_j^i 是克罗内克（Kronecker）符号，当 $i = j$ 时为 1，否则为 0。

3.3.2 **分量之间的转换关系**

逆变分量 v^i 和协变分量 v_i 之间可以通过度规张量 g_{ij} 和逆度规张量 g^{ij} 进行转换：

$$v_i = g_{ij}v^j$$

$$v^i = g^{ij}v_j$$

3.3.3 **等价性的证明**

假设我们从逆变分量和协变基底的表示开始：

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$$

我们可以通过以下步骤将其转换为协变分量和逆变基底的表示：

1. **使用度规张量将逆变分量转换为协变分量**：

$$v_i = g_{ij}v^j$$

2. **将协变分量与逆变基底相乘**：

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}^i$$

反过来，假设我们从协变分量和逆变基底的表示开始：

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}^i$$

我们可以通过以下步骤将其转换为逆变分量和协变基底的表示：

1. **使用逆度规张量将协变分量转换为逆变分量**：

$$v^i = g^{ij}v_j$$

2. **将逆变分量与协变基底相乘**：

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$$

3.4 总结

逆变分量乘以协变基底等于协变分量乘以逆变基底，因为它们都是同一个向量的不同表示形式。这种等价性源于基底之间的对偶关系和分量之间的转换关系。通过度规张量和逆度规张量，我们可以在这两种表示之间自由转换。

4 向量长度的平方等于点积？

是的，向量长度的平方等于该向量与自身的点积。

设向量 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ，则向量 $\mathbf{v}$ 的长度（或范数）定义为：

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

向量长度的平方为：

$$|\mathbf{v}|^2 = (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2)$$

向量 $\mathbf{v}$ 与自身的点积定义为：

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$$

因此，向量长度的平方等于该向量与自身的点积：

$$|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

所以，答案是 是。

5 两个向量的点积是什么

两个向量的点积（也称为内积或数量积）是两个向量之间的一种运算，结果是一个标量（即一个实数）。对于两个向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 和 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ ，它们的点积定义为：

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

点积的几何意义是，它等于两个向量的模长乘以它们之间夹角的余弦值。即：

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$$

其中 $|\mathbf{a}|$ 和 $|\mathbf{b}|$ 分别是向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的模长， θ 是它们之间的夹角。

点积在许多领域都有应用，例如在物理学中，功的定义就是力和位移的点积；在计算机图形学中，点积可以用来计算向量之间的夹角，从而确定光线的反射和折射等。

所以，两个向量的点积是它们对应分量的乘积之和，也可以理解为它们的模长乘以它们之间夹角的余弦值。