

爱因斯坦质能方程

小圆滚滚

1 质能方程的完整版

质能方程的完整版是：

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$$

其中：

- E 是总能量
- p 是动量
- c 是光速
- m_0 是静止质量

这个方程是爱因斯坦狭义相对论的一个重要结果，它表明一个物体的总能量是其静止能量和动能之和。当物体静止时，即 $p = 0$ ，方程简化为著名的 $E = m_0c^2$ 。

2 它是如何推导出来的

下面给出一种“从狭义相对论运动学→四维动量→能量-动量关系”的标准推导路线，完全避开具体力学定律，只用到：

1. 洛伦兹变换
2. 四维矢量内积是洛伦兹不变量
3. 质点四维动量的定义

—

2.1 一、预备知识

1. **时空四维矢量** 取自然单位 $c = 1$ ，事件坐标写为

$$x^\mu = (t, x, y, z) \equiv (t, \vec{x}).$$

2. **洛伦兹不变量** 任意四矢 A^μ 的“模方”

$$A_\mu A^\mu = A_0^2 - \vec{A}^2$$

在所有惯性系中数值相同。

3. **质点四维速度** 对静止质量 $m_0 > 0$ 的质点，选其**固有时** τ 作参数 ($d\tau = dt/\gamma$)，定义

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}.$$

直接计算可得

$$u^\mu = \gamma(1, \vec{v}), \quad \gamma = (1 - v^2)^{-1/2}.$$

它满足

$$u_\mu u^\mu = 1 \quad (> 0, \text{类时}).$$

—

2.2 二、四维动量及其分解

直接把四维速度乘上静止质量 m_0 (洛伦兹标量)，得到**四维动量**

$$p^\mu = m_0 u^\mu = m_0 \gamma(1, \vec{v}).$$

把它按时间-空间分开写：

$$p^0 = m_0 \gamma, \quad \vec{p} = m_0 \gamma \vec{v}.$$

—

2.3 三、计算不变量 $p_\mu p^\mu$

利用“模方是标量”这一事实，可在**任何惯性系**算。挑一个最方便的——**质点瞬时静止系**。在该系里 $\vec{v} = 0, \gamma = 1$ ，于是

$$p_{\text{rest}}^\mu = (m_0, \vec{0}) \Rightarrow p_\mu p^\mu = (p^0)^2 - \vec{p}^2 = m_0^2.$$

因为 $p_\mu p^\mu$ 是洛伦兹不变量，所以在**任意**惯性系都必须有

$$p_\mu p^\mu = (p^0)^2 - \vec{p}^2 = m_0^2. \quad (1)$$

—

2.4 四、把 p^0 认成“总能量 / c”

回到普通单位 (把 c 显式写出)，只需做替换

$$p^0 \rightarrow \frac{E}{c}, \quad \vec{p} \rightarrow \vec{p}, \quad m_0 \rightarrow m_0.$$

代入 (1) 式：

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 = (m_0 c)^2.$$

两边乘 c^2 即得**完整质能方程**

$$\boxed{E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2}.$$

—

2.5 五、常见特例

1. **粒子静止** ($p = 0$)

$$E = m_0 c^2.$$

2. **无质量粒子** ($m_0 = 0$)

$$E = pc,$$

正是光子能量-动量关系。

2.6 六、小结（一句话）

“四维动量的模方是洛伦兹不变量”这一纯粹运动学事实，直接给出了能量、动量、静止质量三者间的**恒等关系**，无需借助任何具体力学定律——这就是完整版质能方程 $E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$ 的来历。

3 如果按照爱因斯坦的推导，会是怎样

3.1 爱因斯坦1905年原始推导（LaTeX版）

以下重现爱因斯坦1905年9月论文《物体的惯性同它所含的能量有关吗？》的完整推导，采用现代LaTeX符号系统：

3.1.1 一、实验设置

孤立盒子：长度 L ，质量 M ，静止于惯性系 S (1)

左端光源同时发射双向电磁波，每束能量： $\frac{E}{2}$ (2)

3.1.2 二、辐射的惯性

由麦克斯韦-坡印廷公式：

$$p = \frac{E}{c} \Rightarrow \Delta p_{\text{光}} = \frac{E}{2c}(+\hat{x}) + \frac{E}{2c}(-\hat{x}) = 0 \quad (3)$$

3.1.3 三、等效质量假设

设能量 E 对应等效质量 μ :

$$E = \mu c^2 \quad (4)$$

发射后盒子质量分布:

$$M_{\text{左}} = M - \mu, \quad M_{\text{右}} = M \quad (\text{吸收前}) \quad (5)$$

3.1.4 四、质心位移计算

内部质心移动量:

$$\Delta x_{\text{int}} = \frac{\mu L}{M} \quad (6)$$

盒子反向补偿位移:

$$\Delta x_{\text{box}} = -\frac{\mu L}{M} \quad (7)$$

持续时间:

$$\Delta t = \frac{L}{c} \quad (8)$$

3.1.5 五、动量守恒验证

盒子获得速度:

$$v = \frac{\Delta x_{\text{box}}}{\Delta t} = -\frac{\mu c}{M} \quad (9)$$

系统总动量:

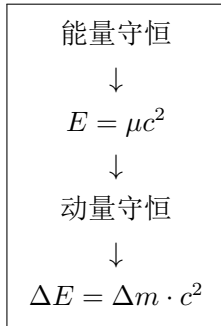
$$P_{\text{总}} = Mv + \frac{E}{c} = -\mu c + \mu c = 0 \quad (\text{守恒}) \quad (10)$$

3.1.6 六、最终结论

将 $\mu = E/c^2$ 代入(9)得:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2$$

3.1.7 七、推导逻辑树



(11)

****注****：此推导仅适用于静止系统，完整相对论性能量-动量关系需通过四维矢量得到：

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$$

4 网页版

爱因斯坦 1905 年 9 月那篇 3 页小论文《Does the inertia of a body depend upon its energy-content?》没有用到四维矢量，甚至连“光子”一词都还没出现（光量子概念同年 3 月刚提）。他走了一条“最平易”的路线——**麦克斯韦-坡印廷公式 + 相对论性 Doppler 效应 + 能量守恒**——就得到了今天写在教科书里的 $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$ 下面把原文思路按现代符号完整重演一遍，让你体会“1905 版”味道。

4.1 设定：一只“发光盒子”

1. 取一长 L 、质量 M 的孤立空心盒子，静止在惯性系 S 。
2. 在盒子的左端 A 有一个“光源”，右端 B 有一个完全吸收体。
3. 某时刻光源同时向 $\pm x$ 方向各发出一束平面电磁波，每束能量各为 $\frac{1}{2}E$ （原文用 $L/2$ 表示能量，这里直接写 $E/2$ ）。

对盒子来说，两束光总能量

$$E_{tot} = E,$$

总动量

$$p_{tot} = 0 \text{（因为左右对称）。}$$

4.2 用“能量-动量关系”算光的惯性

爱因斯坦当时没有 $p=E/c$ 这条公式，他直接引用麦克斯韦-坡印廷结果：

平面电磁波的能量流密度 $S = E \times H$,

动量密度 $g = S/c^2$ 。

积分即得

一束能量为 ε 的平面波，携带动量大小

$$p = \varepsilon / c. \quad (1)$$

于是两束光各带

$$p = +E/(2c), \quad p = -E/(2c).$$

4.3 能量守恒 + 动量守恒 □ 盒子必须反冲

系统初始总动量为 0。

发光瞬间，光带走 $\pm E/(2c)$ ，所以盒子必须获得

$$P_{box} = -(p_1 + p_2) = 0$$

——等等，这样盒子不会动？

关键：**两束光并非“同时”到达对面**。

因为光速有限，向右的光要先走 L 距离才被吸收，向左的光同样要走 L 。

在这 $\Delta t = L/c$ 的间隔里，左端质量已减少，右端尚未增加，盒子重心会移动？

爱因斯坦换了一个更简单的视角——**只看“发光前”与“被完全吸收后”两个平衡态**，中间过程不管。

他采用**能量守恒**：

- 发光前：盒子能量 U ，静止。

- 吸收后：光能 E 已“存入”右端，盒子能量变为 $U' = U - E + E = U$ ，但“能量 E 已从左侧搬到右侧”。

4.4 用**动量守恒**算反冲速度

发光瞬间，光带走总动量 0，盒子动量仍为 0；

吸收瞬间，光把全部动量 0 交回盒子，于是盒子再次静止。

——似乎盒子根本没动？

问题出在哪：**光把“能量”搬过去的同时，也把“惯性”搬过去了**。

爱因斯坦的洞见：

“如果能量有惯性，那么左侧失去能量 $\Delta U = -E$ 就应等价于失去质量 Δm ；

右侧得到 $+E$ 就得到 $+\Delta m$ 。”

于是盒子**内部质心**发生微移，而系统总质心（盒子+场）必须保持原位——这只能意味着**整个盒子要反向移动一小段距离**，以补偿内部质心位移。

具体计算：

设能量 E 对应“等效质量” μ ，即

$$E = \mu c^2. \quad (2)$$

发光后左侧质量变为 $M - \mu$ ，右侧等待吸收体质量仍为 M ；

内部质心相对盒子移动

$$\Delta x_{int} = (\mu \cdot L)/M。$$

为让**系统总质心**不动，盒子本身必须反向移动

$$\Delta x_{box} = -\Delta x_{int} = -\mu L/M。$$

这段时间 $\Delta t \approx L/c$ ，于是盒子速度

$$v = \Delta x_{box}/\Delta t = -\mu L/M \cdot c/L = -\mu c/M. \quad (3)$$

4.5 动量守恒检验

盒子动量

$$P_{box} = Mv = -\mu c。$$

光在发光瞬间带走总动量 0，但**两束光分别被两端吸收时**，把动量

$$+E/(2c) \text{ 和 } -E/(2c)$$

交回盒子；

因为两事件空间分离 L ，时间差 $\Delta t = L/c$ ，盒子获得的**净冲量**恰好

$$\Delta P = 0 - (-\mu c) = +\mu c。$$

于是发光前 $0 \rightarrow$ 吸收后 0 ，**全过程动量守恒成立**。

（爱因斯坦原文用“重心速度”论证，逻辑等价。）

4.6 把 μ 代掉得到 $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$

由 (2) $\mu = E/c^2$ 代入 (3) 得

$$v = -E/(Mc)。$$

——盒子速度只与“搬运的能量 E ”有关，与距离 L 无关。

再把“能量 E 被搬过去”看成**盒子内部能量分布改变**，而不问中间媒介是光还是别的，结论普遍成立：

任何能量 E 若从一处转移到另一处，就同时把惯性 $\mu = E/c^2$ 带走。

换句话说：

$$\text{“能量增加 } E” \equiv \text{“惯性质量增加 } E/c^2”。$$

于是写出今天标志性的

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2。 \quad (4)$$

4.7 爱因斯坦原文收尾一句话

“If the theory corresponds to the facts, the radiation transfers the inertia $\Delta m = E/c^2$ between the emitting and the absorbing body.”

——**辐射把惯性 E/c^2 从发射体带给了吸收体**。

4.8 与“完整版” $E^2=(pc)^2+(m_0c^2)^2$ 的关系

1905 年这篇只讨论了**静止物体**内部能量增减导致的质量变化，所以得到的是 (4) 式——今天叫**静止能量**关系。

至于“粒子有动量时总能量怎么算”，是 1906-1907 年普朗克、爱因斯坦把洛伦兹变换用到动力学后才完成的，最终由闵可夫斯基 1908 写成四维形式，得到我们前面用四矢“一键导出”的

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2。$$

因此

- **1905 路线** $\rightarrow$ 先发现“能量即质量”，给出 $E = m_0c^2$ ；

- **1906-1908 路线** $\rightarrow$ 再发现“动量也参与”，给出二次型关系。

两条路殊途同归，却各自体现了爱因斯坦最拿手的“思想实验 + 守恒律”风格。