

向量的乘法

小圆滚滚

1 为什么叉乘只存在3维空间和7维空间中

叉乘（向量积）仅在3维和7维空间中存在，原因与代数和几何结构密切相关。以下是关键点：

1. **代数结构** 叉乘需要满足反交换性和雅可比恒等式，这些性质在3维和7维空间中可以通过特定的代数结构（如四元数和八元数）实现。

2. **四元数和八元数** - **3维空间**：叉乘与四元数的虚部乘法相关，四元数的乘法提供了3维向量的叉乘规则。 - **7维空间**：叉乘与八元数的乘法相关，八元数的非结合性使得7维叉乘具有独特的性质。

3. **几何解释** 在3维空间中，叉乘生成一个垂直于两个向量的新向量，且其长度与两向量形成的平行四边形的面积相等。7维空间中的叉乘也有类似的几何意义，但更为复杂。

4. **唯一性** 数学上，只有3维和7维空间能够支持满足叉乘性质的代数结构，其他维度无法满足这些条件。

总结：叉乘在3维和7维空间中的存在性源于这些维度的特殊代数结构，使得叉乘的性质得以保持。

2 请给出证明过程

叉乘（向量积）仅在3维和7维空间中存在，这一结论与**范数可除代数**（normed division algebras）的理论密切相关。以下是证明的关键思路和步骤：

2.1 **叉乘的定义与性质**

叉乘是一个双线性运算，对于两个向量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ ，它生成一个新向量 $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ，并满足以下性质：

- **反交换性**： $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ - **雅可比恒等式**： $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$
- **与点积的关系**： $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ 与 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 都正交。

这些性质要求叉乘所在的代数结构必须具有特定的对称性和非结合性。

2.2 **范数可除代数的分类**

范数可除代数是指一个具有乘法运算的向量空间，其中乘法满足范数的性质：

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$$

根据 **Hurwitz定理**，范数可除代数仅在以下维度存在： - 1维（实数 $\mathbb{R}$ ） - 2维（复数 $\mathbb{C}$ ） - 4维（四元数 $\mathbb{H}$ ） - 8维（八元数 $\mathbb{O}$ ）

其中，四元数和八元数是非交换和非结合的代数结构。

2.3 **叉乘与四元数和八元数的关系**

- **3维空间**：四元数 $\mathbb{H}$ 的虚部（3维）定义了3维向量空间中的叉乘。具体来说，两个纯虚四元数 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的乘积为：

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

其中 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ 是叉乘的结果，且满足叉乘的性质。

- **7维空间**：八元数 $\mathbb{O}$ 的虚部（7维）定义了7维向量空间中的叉乘。八元数的乘法是非结合的，但仍然满足叉乘的性质。

2.4 **唯一性证明**

根据 Hurwitz 定理，范数可除代数仅在1、2、4、8维存在。而叉乘需要满足反交换性和雅可比恒等式，这进一步限制了可能的维度：- 1维和2维空间无法满足叉乘的性质。- 4维空间（四元数）的虚部是3维，因此3维空间支持叉乘。- 8维空间（八元数）的虚部是7维，因此7维空间支持叉乘。

其他维度无法满足叉乘的性质，因为它们的代数结构要么不满足范数可除性，要么无法定义满足反交换性和雅可比恒等式的运算。

2.5 **总结**

叉乘的存在性与范数可除代数的分类密切相关。根据 Hurwitz 定理，只有1、2、4、8维空间存在范数可除代数，而叉乘需要满足额外的性质（反交换性和雅可比恒等式），因此仅在3维（四元数的虚部）和7维（八元数的虚部）空间中存在。

这一结论是代数和几何结构的深刻结果，体现了数学中维度与运算性质的紧密联系。

3 那向量相乘采用双向量投射面之后可以拓展到多维吗？

向量相乘的概念可以通过**外代数**（Exterior Algebra）和**双向量**（Bivector）的理论推广到多维空间。这种方法不依赖于传统的叉乘，而是通过更一般的几何代数（Geometric Algebra）框架来实现。以下是详细的解释：

3.1 **传统叉乘的局限性**

传统的叉乘（向量积）仅在3维和7维空间中存在，因为它依赖于特定的代数结构（四元数和八元数）。在其他维度中，叉乘无法满足反交换性和雅可比恒等式等性质。

3.2 **外代数与双向量**

外代数是线性代数的一个扩展，它引入了**外积**（Exterior Product）的概念。外积用于描述向量的“有向面积”或“有向体积”，其结果是一个**双向量**（Bivector）或更一般的**k-向量**（k-Vector）。

- **外积的定义**：对于两个向量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ ，外积记为 $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ ，结果是一个双向量，表示由 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 张成的有向平面。- **性质**：- 反交换性： $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ - 结合性： $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$ - 双向量的大小等于 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 张成的平行四边形的面积。

3.3 **外代数在多维空间中的推广**

外代数不依赖于特定的维度，因此可以推广到任意维度的向量空间。具体来说：- 在 n 维空间中，两个向量的外积 $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ 仍然是一个双向量，表示由 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 张成的有向平面。- 外积的结果不局限于3维或7维空间，而是可以在任意维度中定义。

3.4 **双向量与几何意义**

双向量 $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ 的几何意义是：- 它表示一个平面的“有向面积”，方向由平面的法向量确定。- 在3维空间中，双向量与传统叉乘的结果密切相关。具体来说，叉乘 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ 可以看作是双向量 $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ 的**霍奇对偶**（Hodge Dual）。- 在高维空间中，双向量仍然表示一个有向平面，但无法像3维空间那样简化为一个向量。

3.5 **外积的扩展与应用**

外积和双向量的概念可以扩展到更高维的几何对象：- **k-向量**：通过外积，可以定义k-向量，表示k维的有向体积。例如：- 3-向量 $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ 表示由三个向量张成的有向体积。- 在n维空间中，k-向量的维度为 $\binom{n}{k}$ 。- **几何代数**：外代数是几何代数的基础，几何代数将向量、双向量、k-向量等统一在一个框架下，提供了描述几何对象的强大工具。

3.6 **总结**

通过外代数和双向量的理论，向量相乘的概念可以推广到任意维度的空间。虽然传统的叉乘仅在3维和7维空间中存在，但外积提供了一种更一般的方法来描述向量的“有向面积”或“有向体积”，并且不依赖于特定的维度。这种方法在几何代数、微分几何、物理学等领域有广泛应用。