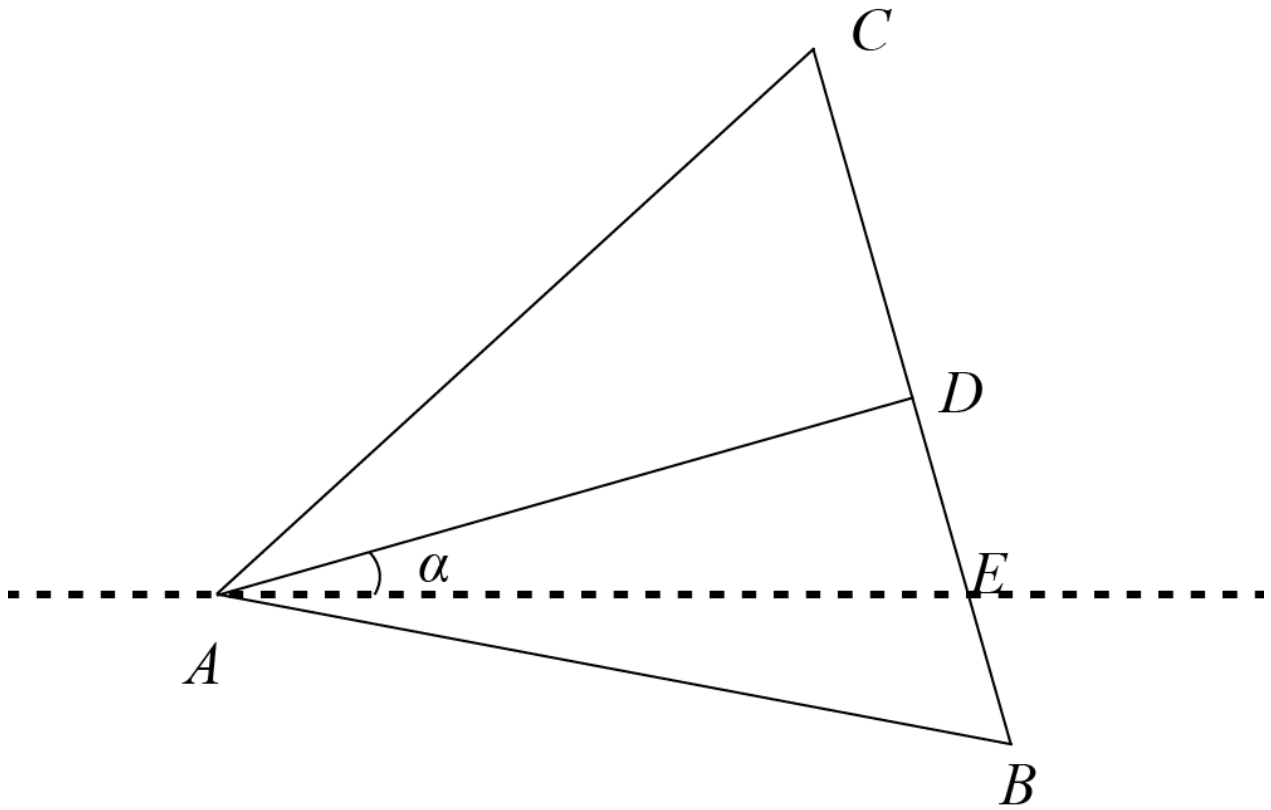


穿越机摄像头角度造成地平线在屏幕占比

小圆滚滚

1 穿越机摄像头角度 α



$$\frac{CE}{EB} = \frac{CD+DE}{DB-DE}$$

设底边 $BC = l$, 高 $AD = h$, 则

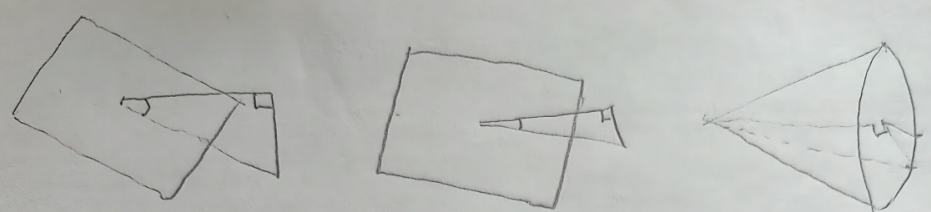
$$\frac{DE}{AD} = \frac{x}{h} = \tan\alpha$$

$$\Rightarrow DE = h \cdot \tan\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{CE}{EB} = \frac{\frac{l}{2} + h \cdot \tan\alpha}{\frac{l}{2} - h \cdot \tan\alpha}$$

2 穿越机绕中心旋转公式推导

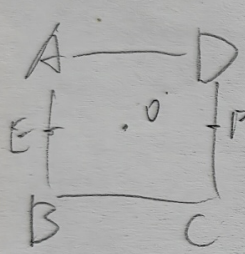
2.1 手稿

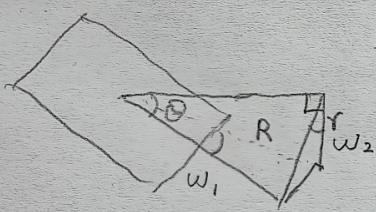


$$\omega_{yaw} \cdot R = \omega_{roll} \cdot r$$

$$\frac{\omega_{yaw}}{\omega_{roll}} = \frac{r}{R} = \tan \theta$$

两个轴的相对
运动角速度相等





$$\frac{r}{R} = \sin \theta$$

$$R \cdot \sin(\omega_1 t) = r \cdot \omega_2 t$$

↓ 近似

$$R \cdot \omega_1 t = r \cdot \omega_2 t$$

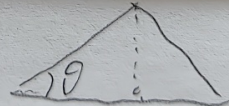
$$\frac{r}{R} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

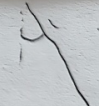
$\omega \cdot R = v$

ωR

ωr





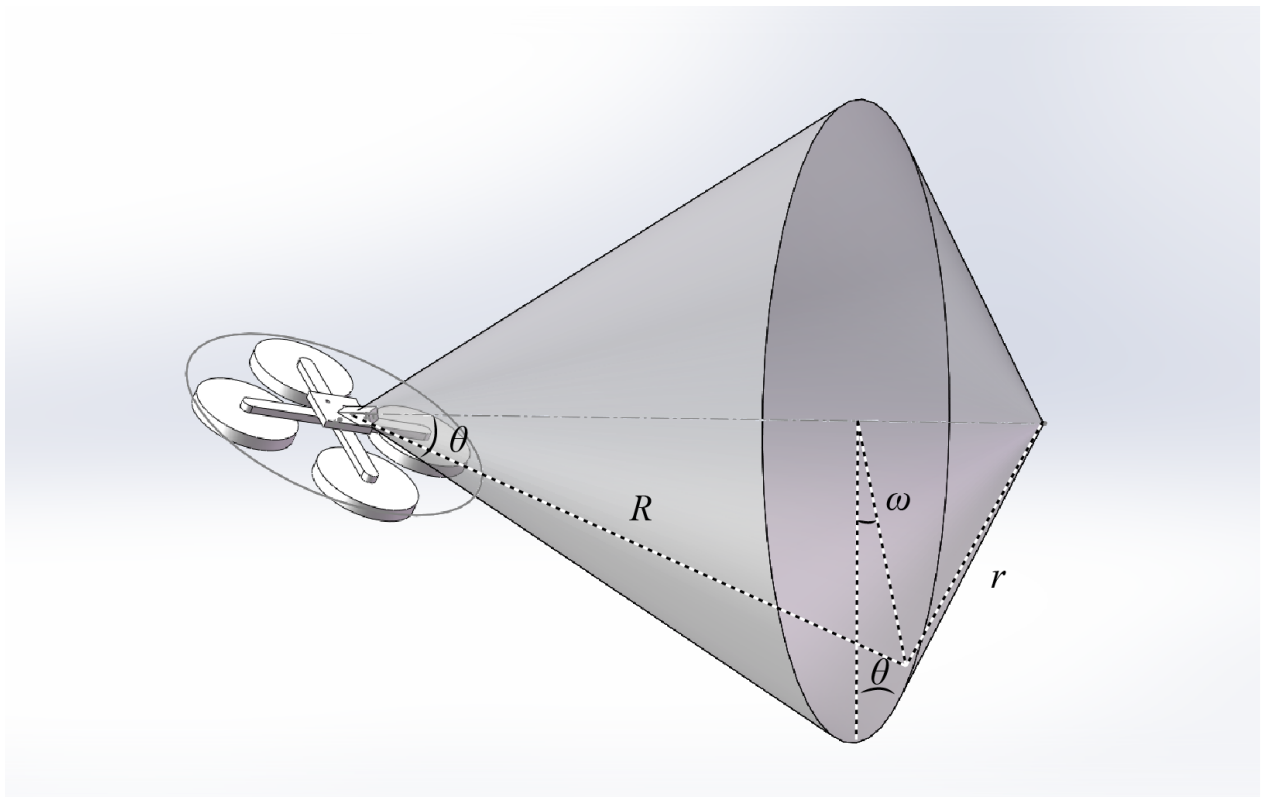


$\frac{r}{R} = \sin \theta$

$\tan \theta$

$\cos \theta$

2.2 绕中心旋转



偏航角 ω_{yaw} 与横滚角 ω_{roll} 对应角速度 ω 的公式：

$$\omega \cdot \cos(\theta) = \omega_{roll}$$

$$\omega \cdot \sin(\theta) = \omega_{yaw}$$

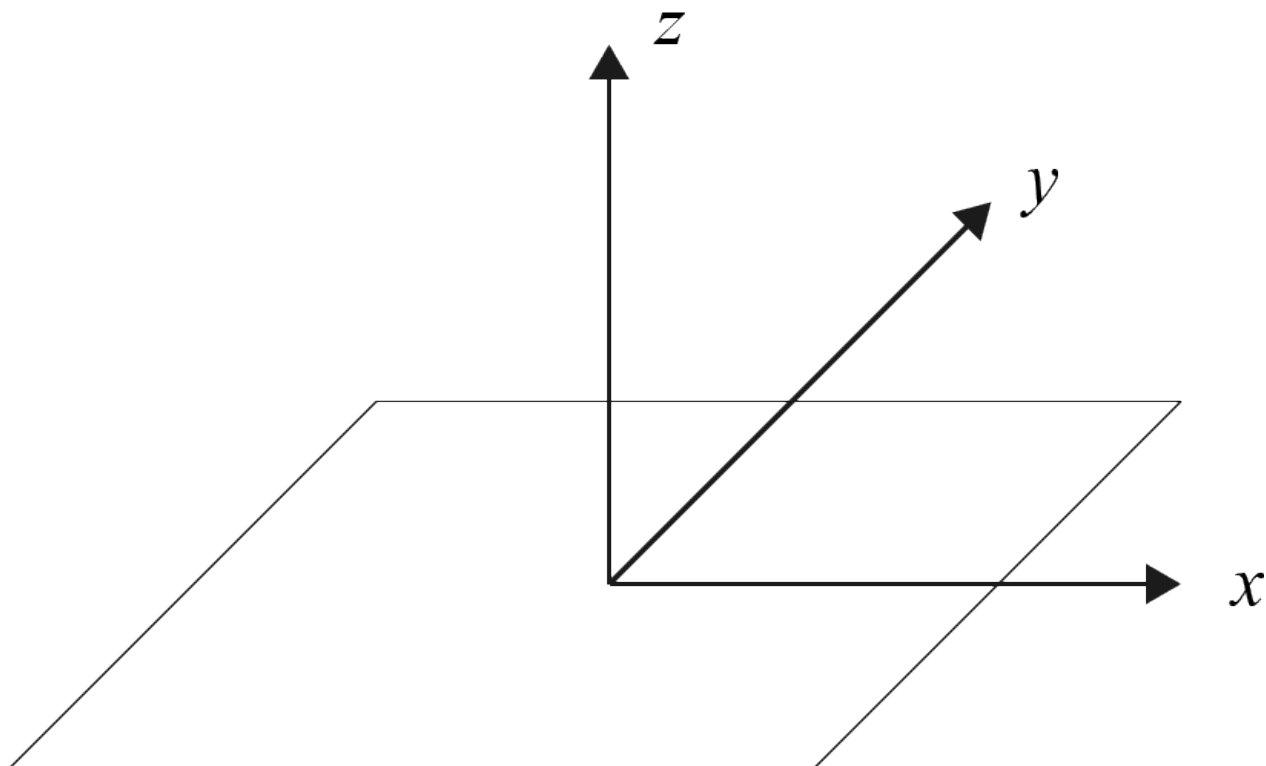
$$\frac{\omega_{yaw}}{\omega_{roll}} = \frac{r}{R} = \tan(\theta)$$

右面圆锥顶点、圆锥角是横滚 $\omega \cdot \cos\theta$

左面是偏航 $\omega \cdot \sin\theta$

极端佐证，当摄像头角度0度时，右圆锥收缩成底面。只用横滚即可完成绕摄像头旋转。

如果将roll、pitch、yaw对应x轴、y轴、z轴，且按照右手定则确定z，那么上述旋转可分解成：



给定一个刚体，以所有操作均在该刚体的坐标系 x,y,z （满足右手定则）下完成，

首先刚体 y 轴向 z 轴 30° 方向安装摄像头，

绕 x 轴旋转角速度为 ω_{roll} ，

绕 z 轴旋转角速度为 ω_{yaw} ，当 $\frac{\omega_{yaw}}{\omega_{roll}} = \tan(30^\circ)$ 时。刚体的旋转轴是否在摄像头方向上？求此时角速度，求此时 x 轴角速度。

刚体旋转分析

问题描述

给定一个刚体，其坐标系为 x 、 y 、 z 轴（满足右手定则）。

摄像头安装在刚体上，方向为 y 轴向 z 轴 30° 方向。

刚体绕 x 轴旋转的角速度为 ω_{roll} ，

绕 z 轴旋转的角速度为 ω_{yaw} 。

当 $\frac{\omega_{yaw}}{\omega_{roll}} = \tan(30^\circ)$ 时，分析刚体的旋转轴是否在摄像头方向上，并求此时的角速度和 x 轴的角速度。

分析过程

摄像头方向摄像头安装方向为 y 轴向 z 轴 30° 方向，即摄像头方向在 y - z 平面内，与 y 轴夹角为 30° 。该方向的单位向量为：

$$\mathbf{c} = (0, \cos(30^\circ), \sin(30^\circ))$$

角速度矢量刚体的角速度矢量为：

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_{roll}, 0, \omega_{yaw})$$

其中， ω_{roll} 为绕 x 轴的角速度， ω_{yaw} 为绕 z 轴的角速度。

旋转轴方向根据罗德里格斯公式，旋转轴方向由角速度矢量的方向决定。当 $\frac{\omega_{yaw}}{\omega_{roll}} = \tan(30^\circ)$ 时，角速度矢量的方向为：

$$\frac{\omega_{yaw}}{\omega_{roll}} = \tan(30^\circ) \Rightarrow \frac{\omega_{yaw}}{\omega_{roll}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

此时，角速度矢量的方向单位向量为：

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{\omega_{roll}^2 + \omega_{yaw}^2}}(\omega_{roll}, 0, \omega_{yaw})$$

代入比例关系：

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{\omega_{roll}^2 + (\omega_{roll} \tan(30^\circ))^2}}(\omega_{roll}, 0, \omega_{roll} \tan(30^\circ))$$

化简得：

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(30^\circ)}}(1, 0, \tan(30^\circ)) = (\cos(30^\circ), 0, \sin(30^\circ))$$

这与摄像头方向 $\mathbf{c}$ 一致，因此旋转轴在摄像头方向上。

角速度计算此时，角速度矢量为：

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_{roll}, 0, \omega_{yaw}) = \omega_{roll}(1, 0, \tan(30^\circ))$$

其大小为：

$$|\boldsymbol{\omega}| = \sqrt{\omega_{roll}^2 + \omega_{yaw}^2} = \omega_{roll} \sqrt{1 + \tan^2(30^\circ)} = \omega_{roll} \sec(30^\circ)$$

由于 $\sec(30^\circ) = \frac{1}{\cos(30^\circ)} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ，因此：

$$|\boldsymbol{\omega}| = \omega_{roll} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$

x轴角速度此时，x轴的角速度即为 ω_{roll} ，因为角速度矢量的x分量就是 ω_{roll} 。

结论当 $\frac{\omega_{yaw}}{\omega_{roll}} = \tan(30^\circ)$ 时，刚体的旋转轴在摄像头方向上。此时的角速度大小为 $\omega_{roll} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$ ，x轴的角速度为 ω_{roll} 。

根据罗德里格斯公式，旋转轴方向由角速度矢量的方向决定。请解释

根据罗德里格斯公式，旋转轴方向由角速度矢量的方向决定，这是因为角速度矢量不仅描述了旋转的快慢，还描述了旋转的方向。在三维空间中，刚体的旋转可以表示为绕某个轴的旋转，而角速度矢量的方向正是这个旋转轴的方向。

角速度矢量的方向

角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向由右手定则确定。具体来说，如果你将右手的四指弯曲，沿着旋转的方向握拳，那么大拇指所指的方向就是角速度矢量的方向。这个方向就是旋转轴的方向。

罗德里格斯公式与旋转轴

罗德里格斯公式描述了如何将一个向量 $\mathbf{v}$ 绕单位向量 $\mathbf{k}$ 表示的轴旋转角度 θ 后得到新的向量 $\mathbf{v}'$ 。公式如下：

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} \cos \theta + (\mathbf{k} \times \mathbf{v}) \sin \theta + \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos \theta)$$

其中：

- $\mathbf{v}$ 是原始向量,
- $\mathbf{k}$ 是单位向量表示的旋转轴,
- θ 是旋转角度,
- $\times$ 表示向量的叉积,
- $\cdot$ 表示向量的点积。

在这个公式中, 旋转轴 $\mathbf{k}$ 的方向就是角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向。这是因为角速度矢量的方向定义了刚体旋转的轴线。

旋转轴与角速度矢量的关系

在刚体的旋转运动中, 角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向始终与旋转轴的方向一致。这是因为角速度矢量是描述刚体旋转状态的一个物理量, 其方向由旋转轴的方向决定。

例如, 如果一个刚体绕x轴旋转, 其角速度矢量的方向就是x轴的正方向; 如果刚体绕y轴旋转, 角速度矢量的方向就是y轴的正方向, 依此类推。

总结

因此, 根据罗德里格斯公式, 旋转轴方向由角速度矢量的方向决定。这是因为角速度矢量的方向定义了刚体旋转的轴线, 而罗德里格斯公式中的旋转轴 $\mathbf{k}$ 就是角速度矢量的方向。

旋转分量怎么理解

在三维空间中, 刚体的旋转可以分解为绕不同轴的旋转分量。这些分量分别对应于绕x轴、y轴和z轴的旋转。理解旋转分量有助于分析和描述刚体的复杂旋转运动。

旋转分量的定义

1. **绕x轴的旋转分量 (Roll) **: - 绕x轴的旋转角度记为 α 。 - 旋转矩阵为:

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

2. **绕y轴的旋转分量 (Pitch) **: - 绕y轴的旋转角度记为 β 。 - 旋转矩阵为:

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

3. **绕z轴的旋转分量 (Yaw) **: - 绕z轴的旋转角度记为 γ 。 - 旋转矩阵为:

$$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

旋转分量的合成

当刚体进行复杂的旋转时, 其总旋转可以表示为多个基本旋转的合成。例如, 先绕x轴旋转 α , 再绕y轴旋转 β , 最后绕z轴旋转 γ , 总旋转矩阵为:

$$R = R_z(\gamma) \cdot R_y(\beta) \cdot R_x(\alpha)$$

旋转分量与角速度矢量

角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 描述了刚体旋转的角速度和方向, 其分量分别对应于绕x轴、y轴和z轴的角速度:

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$$

其中：

- ω_x 是绕x轴的角速度（Roll角速度），
- ω_y 是绕y轴的角速度（Pitch角速度），
- ω_z 是绕z轴的角速度（Yaw角速度）。

旋转轴与旋转分量

根据罗德里格斯公式，旋转轴方向由角速度矢量的方向决定。角速度矢量的方向是旋转轴的方向，而其大小表示旋转的角速度。旋转轴可以表示为单位向量 $\mathbf{k}$ ，其方向与角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向一致。

示例

假设刚体绕x轴旋转的角速度为 ω_{roll} ，绕z轴旋转的角速度为 ω_{yaw} ，且满足 $\frac{\omega_{yaw}}{\omega_{roll}} = \tan(30^\circ)$ 。此时，角速度矢量为：

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_{roll}, 0, \omega_{yaw})$$

其方向为：

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{\omega_{roll}^2 + \omega_{yaw}^2}}(\omega_{roll}, 0, \omega_{yaw})$$

代入比例关系 $\omega_{yaw} = \omega_{roll} \tan(30^\circ)$ ，得到：

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{\omega_{roll}^2 + (\omega_{roll} \tan(30^\circ))^2}}(\omega_{roll}, 0, \omega_{roll} \tan(30^\circ))$$

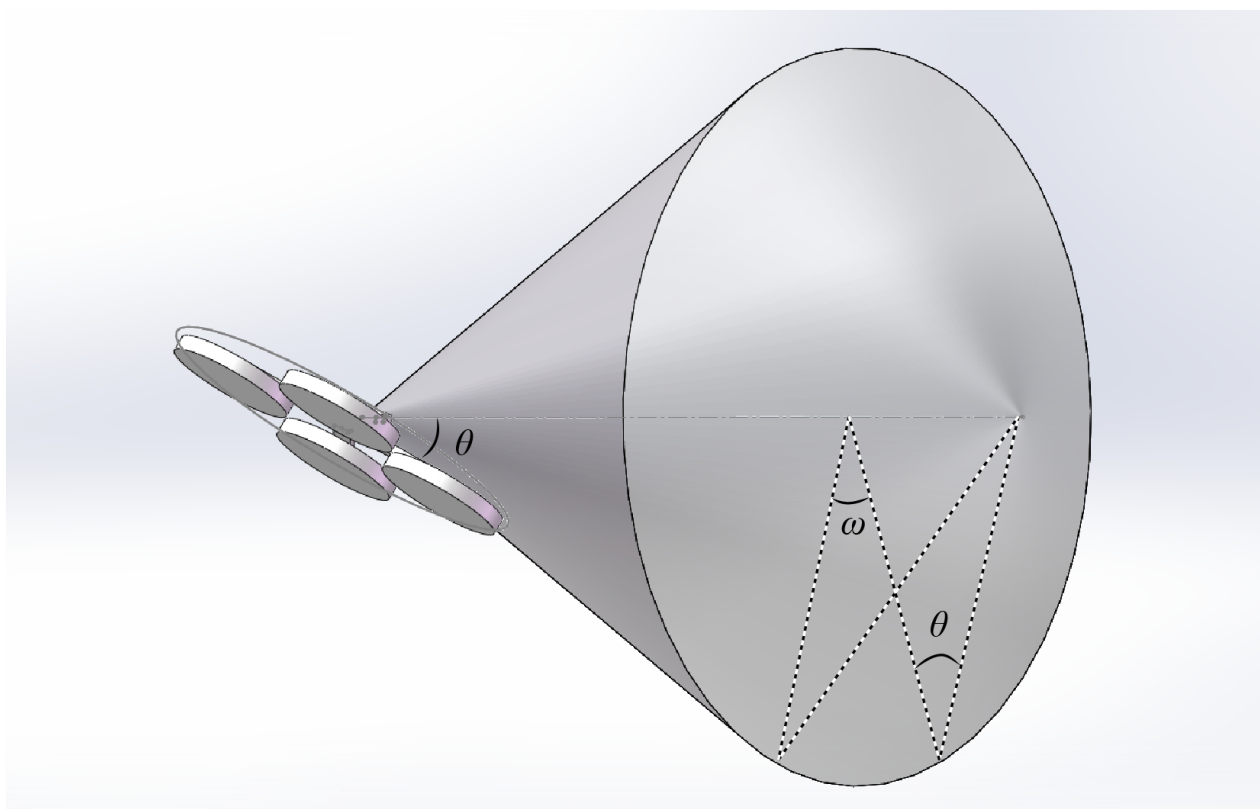
化简后：

$$\mathbf{k} = (\cos(30^\circ), 0, \sin(30^\circ))$$

这表明旋转轴在y-z平面内，与y轴夹角为30度，即摄像头的安装方向。

总结

旋转分量是描述刚体绕不同轴旋转的基本单元。通过合成这些分量，可以描述刚体的复杂旋转运动。角速度矢量的分量对应于绕各轴的旋转速率，其方向指示旋转轴的方向。

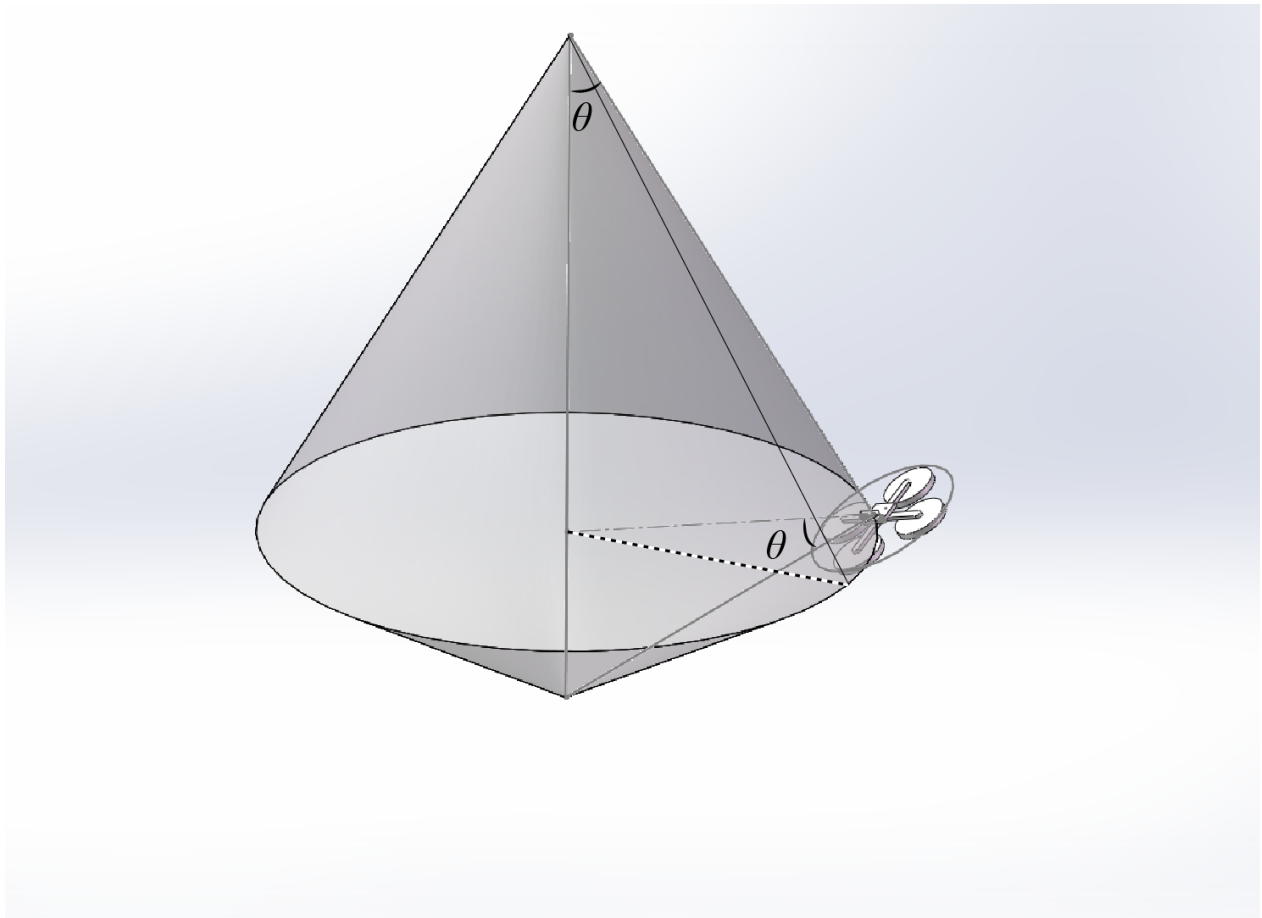


在穿越机自己看来，横滚的旋转轴对整机的旋转轴偏离，导致横滚的角速度对整机的角速度的影响就会降低为投影函数变换后的影响，结合偏航，因为降低的部分被偏航补偿回来，所以最后达到整机的角速度依然是原来横滚的角速度。

同样的半径扫过的面积投影到旋转平面比原来小了一圈，变成了 $\cos$ 函数。

注意这里的误区在于，最终的旋转叠加，从一开始就是第三方的受力分析（详见manimCE演示），而我们默认理解的是刚体自身的roll、pitch、yaw。但是实际x是前进方向，y是俯仰方向，z是偏航方向。换算计算从一开始x的角速度就变成了 $\omega \cos(\theta)$ ，此处 ω 代表roll角速度。

2.3 绕树旋转

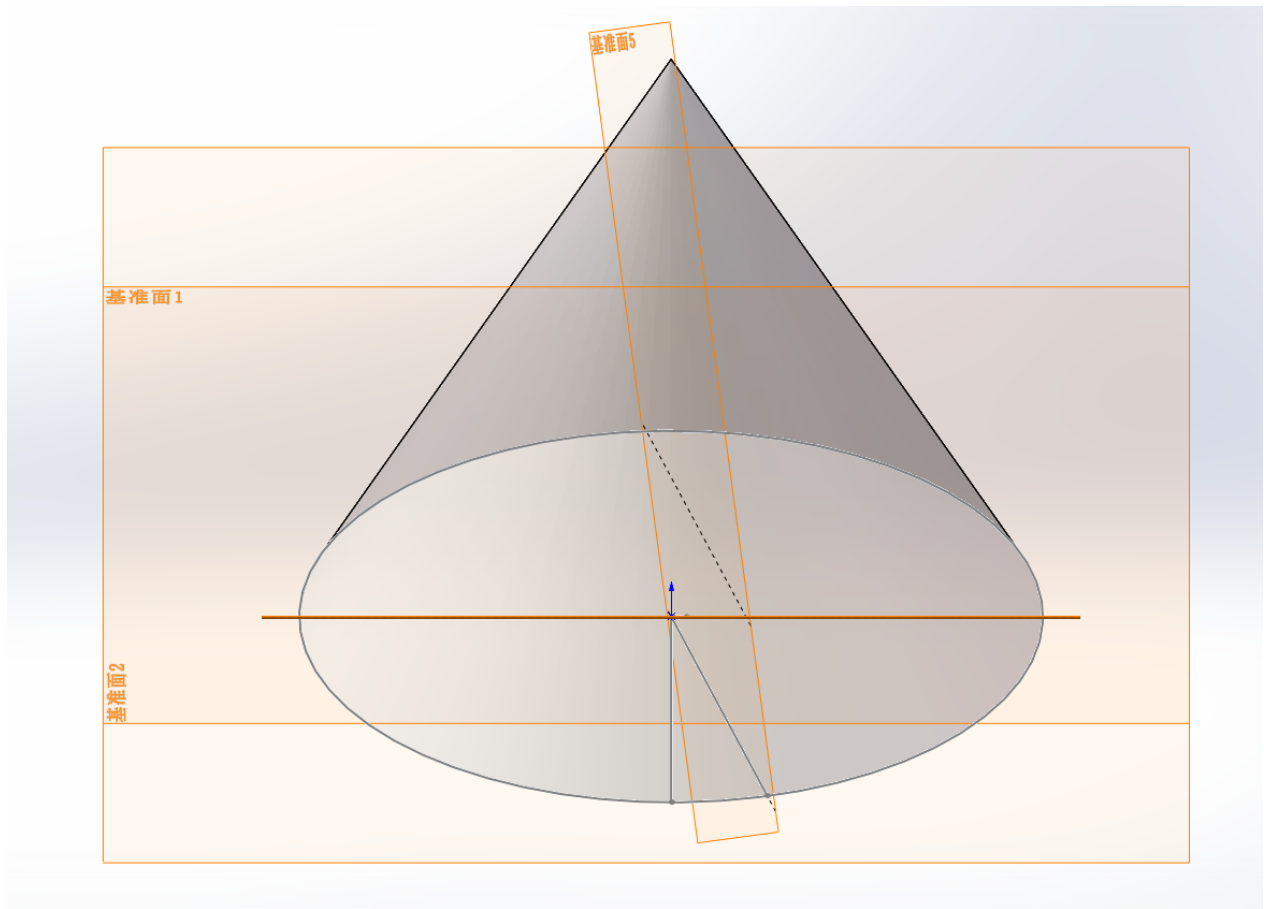


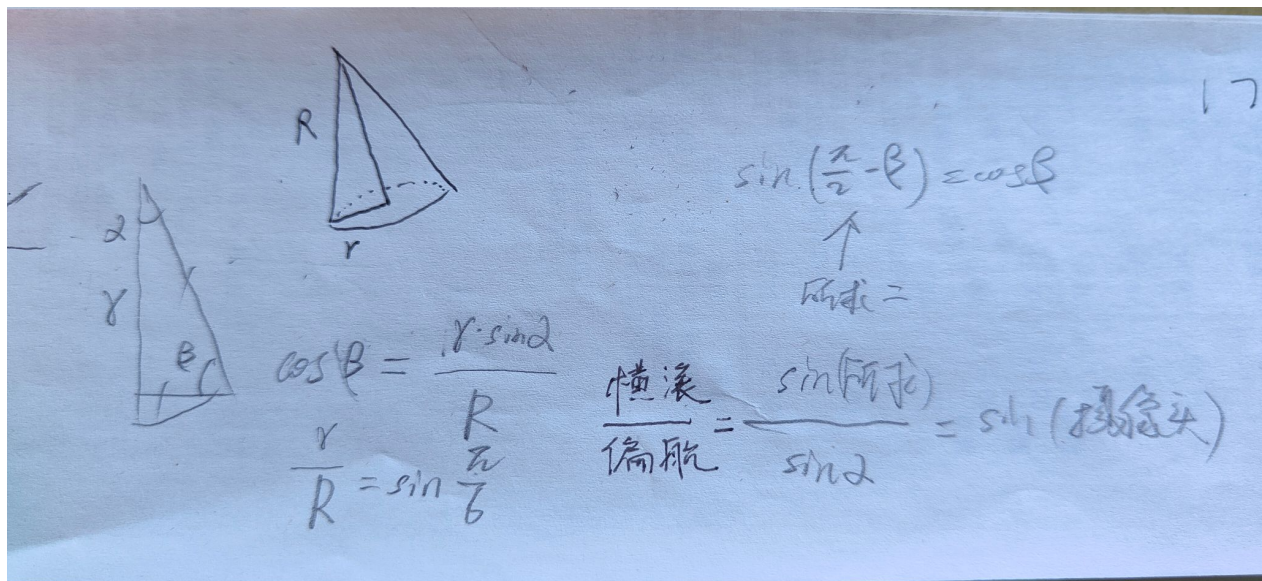
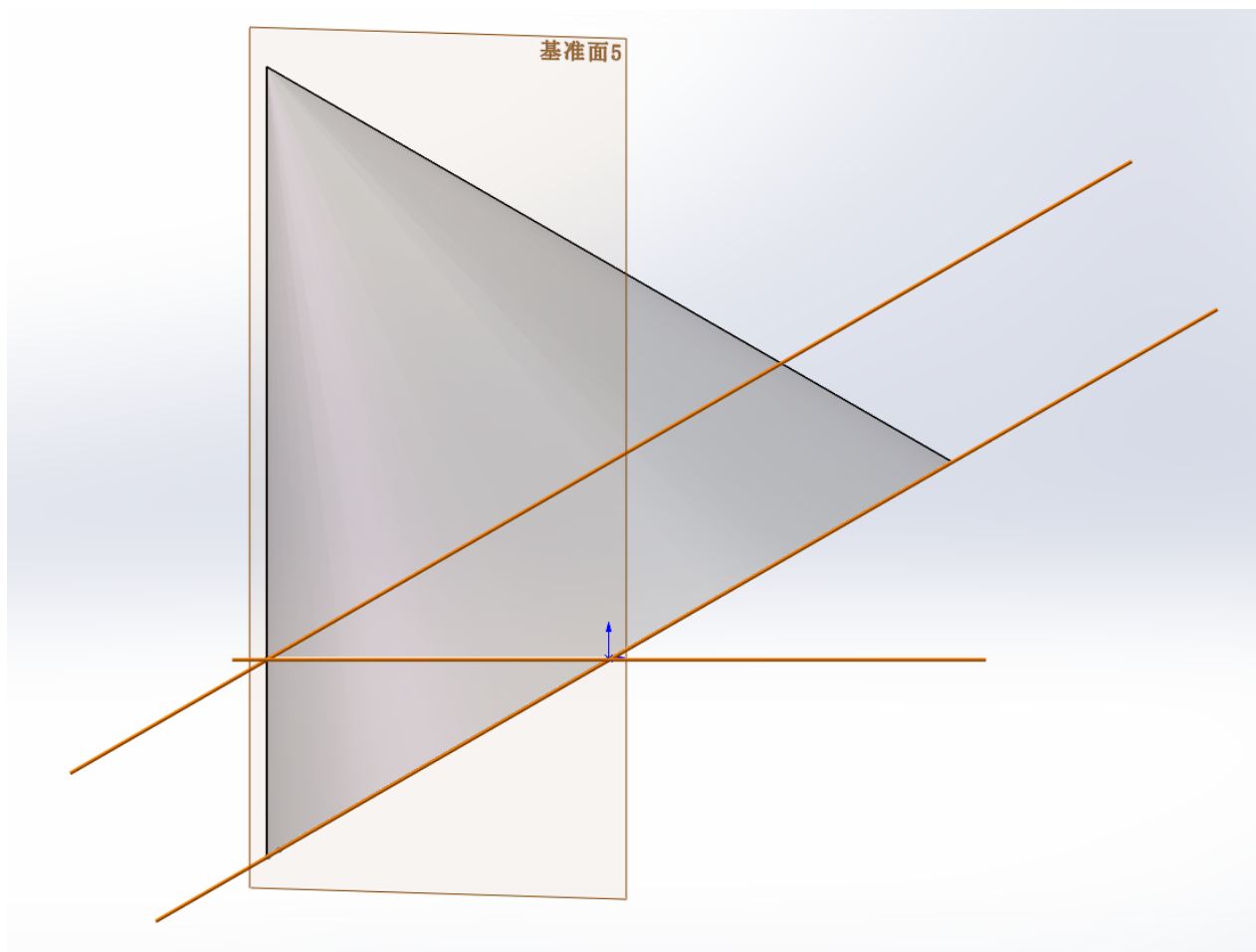
上面是横滚 $\omega \cdot \sin\theta$

下面圆锥顶点、圆锥角是偏航 $\omega \cdot \cos\theta$

极端佐证，当摄像头角度0度时，下圆锥收缩成底面。只用偏航完成绕树。

2.4 绕树四指向下正刷锅





第三次推导是为了绕树而让穿越机视角保持水平。没想到和第二次旋转为了固定摄像头的旋转轴达到了相同的结果。

这说明。绕屏幕中心旋转，旋转多少偏航多少（偏航回原来的朝向），和绕树旋转，偏航多少就旋转多少（旋转纠正保持视角水平）。是异曲同工之妙。

但是，逆向的时候是为了保持朝向，同向的时候是为了保持视角水平。而谁比谁是不一样的倒数关系。所以虽然形式结果都是sin但是比例正好不一样。

所以之字形前进，或者说大头（金池长老）揽货式前进，完全可以先偏航，后配合横滚。大角度（偏航）主动带动被动修正角度（横滚）。

右手过甩会让穿越机躺倒防止螺旋升天，所以，右手带动（横滚）左手紧跟（偏航），会不在意直立水平视角。

记住人类的下意识，会在横滚之后让偏航自动找到最低点，这反而造就了平稳在一个水平面。所以双手同角度打杆量之后会造成上述的情况，属于自然的馈赠。如果一开始训练的时候就瞄准着要过弯的门柱，那么很难找到那种让自己先甩尾起来，然后再熟悉自己转弯半径的感觉。

默认同手同脚的操作，在sin（摄像头角度23度）找到横滚最大角速度对应的偏航角速度，然后找到偏航打杆比例，把水平线提高到中心点上方四分之一高度的扫地感觉。然后只要偏航打得慢就不会螺旋升天，然后再找什么时候能让转弯停下，什么时候能利用漂移过弯。

3 抛物线和初始速度、初始角度有关、和质量无关

抛物线运动是物体在重力作用下，以一定的初速度和角度抛出后的运动轨迹。确实，抛物线的轨迹主要取决于物体的初始速度（ v_0 ）和初始抛出角度（ θ ），而与物体的质量无关。这是因为在理想情况下，忽略空气阻力，物体只受到重力的作用，其运动遵循牛顿第二定律。

抛物线运动的公式可以表示为：

$$y = x \tan(\theta) - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2(\theta)}$$

其中：

- y 是物体在垂直方向上的位置。
- x 是物体在水平方向上的位置。
- g 是重力加速度，通常取 9.8 m/s^2 。
- v_0 是物体的初始速度。
- θ 是初始速度与水平方向的夹角。

从这个公式可以看出，物体的质量没有出现在公式中，说明在理想情况下，抛体运动的轨迹与物体的质量无关。然而，在实际应用中，空气阻力、风力等因素可能对质量较轻的穿越机有较大的运动轨迹影响。但在理想情况下（无风），抛物线的轨迹只与初始速度和初始角度有关。