

罗德里格斯旋转公式

小圆滚滚

1 推导罗德里格斯公式

罗德里格斯公式 (Rodrigues' rotation formula) 是用于计算三维空间中一个向量绕给定轴旋转特定角度后的新向量的公式。下面是罗德里格斯公式的推导过程:

1. **定义和分解向量**: 设 \vec{v} 为待旋转向量, \vec{u} 为旋转轴单位向量, θ 为旋转角度。首先将 \vec{v} 分解为平行于旋转轴 \vec{u} 的分量 \vec{v}_{\parallel} 和垂直于旋转轴的分量 \vec{v}_{\perp} 。

2. **计算平行分量**: $\vec{v}_{\parallel} = \text{proj}(\vec{v}, \hat{a}) = (\vec{v} \cdot \hat{a})\hat{a}$

在线性代数中, $\text{proj}(\vec{v}, \hat{a})$ 表示向量 \vec{v} 在向量 \hat{a} 上的投影。这里的 \hat{a} 通常是一个单位向量, 即已经被归一化(normalize)的向量, 其长度为1。向量 \vec{v} 在 \hat{a} 上的投影是 \vec{v} 沿着 \hat{a} 方向的分量。

计算向量 \vec{v} 在单位向量 \hat{a} 上的投影的公式是:

$$\text{proj}(\vec{v}, \hat{a}) = (\vec{v} \cdot \hat{a})\hat{a}$$

其中, $\vec{v} \cdot \hat{a}$ 是向量 \vec{v} 和 \hat{a} 的点积(点积满足交换律), 它给出了 \vec{v} 在 \hat{a} 方向上的标量分量, 然后这个标量乘以 \hat{a} 就得到了 \vec{v} 在 \hat{a} 上的向量投影。

3. **计算垂直分量**: $\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel}$

4. **确定正交基**: 在 \vec{u} 和 \vec{v}_{\perp} 所在平面确定正交基 \hat{a} 和 \hat{b} ,

其中 \hat{a} 是标准化之后的 \vec{u} 。 \hat{a}, \hat{b} 是 \hat{a} 和 \vec{v} 所在平面的正交基。

$$\hat{b} = \text{normalize}(\vec{v}_{\perp}) = \frac{\vec{v}_{\perp}}{\|\vec{v}_{\perp}\|}$$

5. **旋转垂直分量**: \vec{v}_{\perp} 旋转后的分量 $\vec{v}_{\perp \text{rot}}$ 可以表示为:

$$\vec{v}_{\perp \text{rot}} = |\vec{v}_{\perp}| \cos \theta \cdot \hat{b} + |\vec{v}_{\perp}| \sin \theta \cdot \hat{c}$$

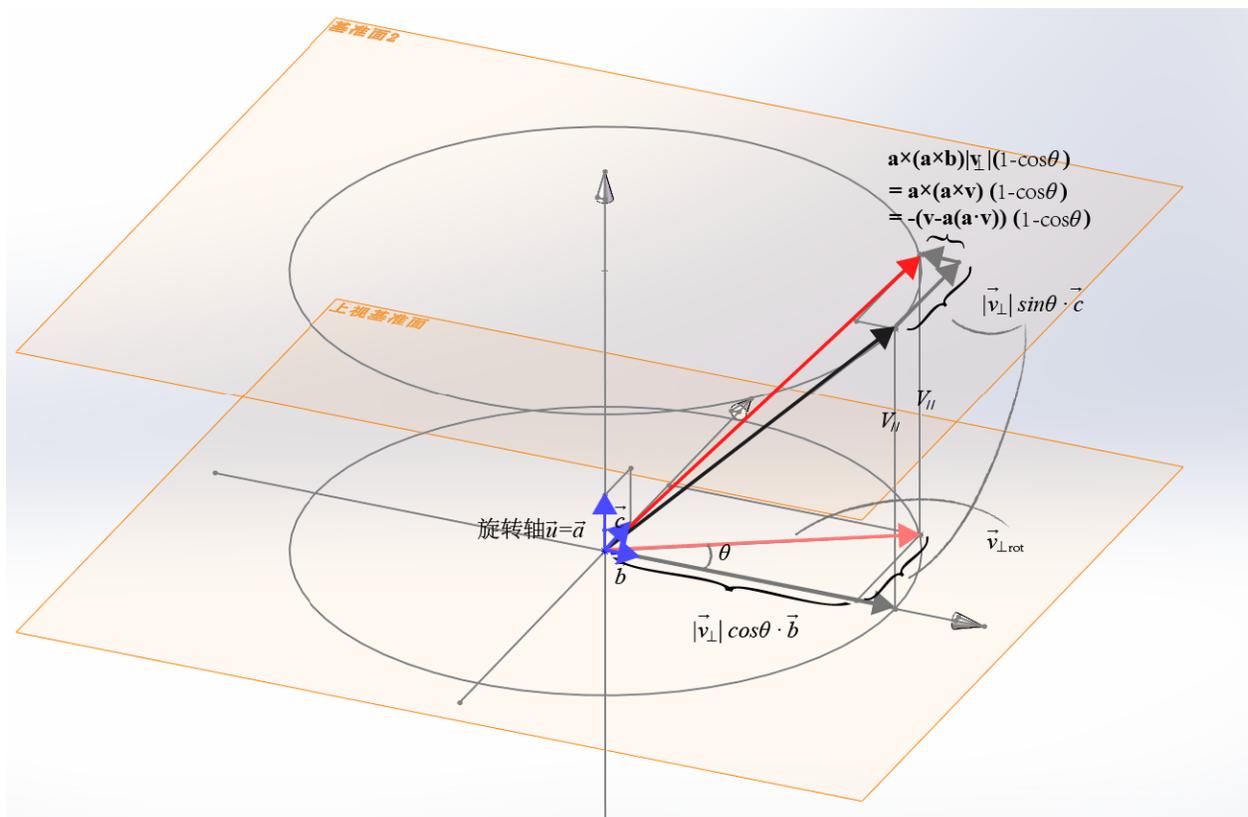
其中 $\hat{c} = \hat{a} \times \hat{b} = \frac{\hat{a} \times \vec{v}_{\perp}}{\|\vec{v}_{\perp}\|} = \frac{\hat{a} \times \vec{v}}{\|\vec{v}_{\perp}\|}$ 是垂直于 \hat{a} 和 \hat{b} 的向量。

根据向量叉乘几何意义可得出三维坐标系的第三个正交基 \hat{c} , 根据叉乘的分配律可得上述结果。

$$\hat{a} \times \vec{v}_{\perp} = \hat{a} \times (\vec{v} - \vec{v}_{\parallel}) = \hat{a} \times \vec{v} - \hat{a} \times \vec{v}_{\parallel}$$

6. **组合旋转后的向量**: 旋转后的向量 \vec{v}_{rot} 是平行分量和旋转后的垂直分量的和:

$$\vec{v}_{\text{rot}} = \vec{v}_{\text{rot}\parallel} + \vec{v}_{\text{rot}\perp}$$



代入 \vec{v}_{\parallel} 和 $\vec{v}_{\perp rot}$ 的表达式，得到：

$$\begin{aligned}
 \vec{v}_{rot} &= \vec{v}_{\parallel} + |\vec{v}_{\perp}| \cos \theta \cdot \hat{b} + |\vec{v}_{\perp}| \sin \theta \cdot \hat{c} \\
 &= \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \cos \theta + (\vec{u} \times \vec{v}) \sin \theta \\
 &= \vec{v}_{\parallel} + (\vec{v} - \vec{v}_{\parallel}) \cos \theta + (\vec{u} \times \vec{v}) \sin \theta \\
 &= \vec{v} \cdot \cos \theta + (1 - \cos \theta) \cdot \vec{v}_{\parallel} + (\vec{u} \times \vec{v}) \sin \theta \\
 &= \cos \theta \cdot \vec{v} + (1 - \cos \theta) \cdot (\hat{u} \cdot \vec{v}) \hat{u} + (\vec{u} \times \vec{v}) \sin \theta
 \end{aligned}$$

注意，这里的“·”只要不是向量相乘，就不是点积的意思。向量相乘我用“·”。因为点积满足交换律、叉积不满足交换律！

进一步化简，得到：

$$\vec{v}_{rot} = \vec{v} \cos \theta + (1 - \cos \theta)(\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u} + \sin \theta(\vec{u} \times \vec{v})$$

这就是罗德里格斯公式的向量形式。

7. **转换为矩阵形式**：将上述公式转换为矩阵形式，设 \vec{u} 为列向量 $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$ ，则旋转矩阵 R

可以表示为：

$$R = \cos \theta I + (1 - \cos \theta) \vec{u} \vec{u}^T + \sin \theta \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix}$$

其中 I 是单位矩阵, $\vec{u}\vec{u}^T$ 是 \vec{u} 与其自身的外积。

具体过程:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{rot} &= \vec{v} - \vec{v} + \cos\theta \cdot \vec{v} + (1 - \cos\theta) \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{u} + \vec{u} \times \vec{v} \cdot \sin\theta \\ &= \vec{v} - (1 - \cos\theta) \cdot \vec{v} + (1 - \cos\theta) \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{u} + \vec{u} \times \vec{v} \cdot \sin\theta \\ &= \vec{v} - (1 - \cos\theta) \cdot (\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{u}) + \vec{u} \times \vec{v} \cdot \sin\theta \\ &= \vec{v} + (1 - \cos\theta) \cdot [(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v}] + \vec{u} \times \vec{v} \cdot \sin\theta \end{aligned}$$

其中 $(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 1$

向量三重积展开公式: BAC-CAB(Back-Cab, 后面的出租车)

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

将

$$\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = [\vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{u})]$$

逆向使用上述公式, 可得:

$$\vec{v}_{rot} = \vec{v} + (1 - \cos\theta) \cdot \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{v}) + \vec{u} \times \vec{v} \cdot \sin\theta$$

又乘矩阵:

$$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -z_a & y_a \\ z_a & 0 & -x_a \\ -y_a & x_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix}$$

用矩阵 R_u 替换 \vec{u}

$$\begin{aligned} \vec{v}_{rot} &= \vec{v} + (1 - \cos\theta) \cdot R_u^2 \cdot \vec{v} + R_u \cdot \vec{v} \cdot \sin\theta \\ &= [I + (1 - \cos\theta) \cdot R_u^2 + R_u \cdot \sin\theta] \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

这里矩阵变换是左乘, 所以 R^2 表示单位矩阵两次左乘。

令

$$M = I + (1 - \cos\theta) \cdot R_k^2 + R_k \cdot \sin\theta$$

$$\vec{v}_{rot} = M \cdot \vec{v}$$

这就是罗德里格斯公式的推导过程。

8. 旋转矩阵 R , 它用于表示绕单位向量 \vec{u} 旋转角度 θ :

$$R = \cos\theta I + (1 - \cos\theta)\vec{u}\vec{u}^T + \sin\theta \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_{rot} = \left(\cos\theta I + (1 - \cos\theta)\vec{u}\vec{u}^T + \sin\theta \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \right) \vec{v}$$

$$\vec{v}_{rot} = \vec{v} \cos \theta + (1 - \cos \theta)(\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u} + \sin \theta(\vec{u} \times \vec{v})$$

在数学中，向量 \vec{u} 和它的转置 \vec{u}^T 相乘得到的是一个矩阵，这个过程称为向量的外积 (outer product)。向量的外积在构建旋转矩阵中非常重要，因为它能够将向量投影到由 \vec{u} 定义的方向上。

具体来说，如果 \vec{u} 是一个 n 维列向量，那么 \vec{u}^T 是一个 n 维行向量。它们的乘积 $\vec{u}\vec{u}^T$ 是一个 $n \times n$ 矩阵，其元素定义为 $(\vec{u}\vec{u}^T)_{ij} = u_i u_j$ ，其中 u_i 和 u_j 是向量 \vec{u} 的第 i 个和第 j 个分量。

在三维空间中，如果 \vec{u} 是一个单位向量 (即 $|\vec{u}| = 1$)，那么 $\vec{u}\vec{u}^T$ 表示的是一个投影矩阵，它将任何向量投影到 \vec{u} 所在的直线上。这是因为对于任何向量 \vec{v} ， $\vec{u}(\vec{u}^T \vec{v})$ 就是 \vec{v} 在 \vec{u} 方向上的投影。

在旋转矩阵的公式中， $(1 - \cos \theta)\vec{u}\vec{u}^T$ 表示的是向量在旋转过程中沿着旋转轴 \vec{u} 的压缩或拉伸效应。由于 \vec{u} 是单位向量， $\vec{u}\vec{u}^T$ 确保了这种压缩或拉伸只发生在 \vec{u} 定义的方向上。进阶可以看《自旋子之谜》。

总结来说，向量 \vec{u} 的转置是为了与 \vec{u} 相乘得到一个矩阵，这个矩阵能够表示向量在 \vec{u} 方向上的投影，这是构建旋转矩阵的关键步骤。

2 请解释上述点乘和叉乘的计算。

当然，让我们详细解释一下点乘和叉乘的计算：

2.1 点乘 (点积、内积)

点乘是两个向量之间的运算，结果是一个标量。对于两个向量 $\hat{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$ 和 $\hat{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$ ，它们的点乘定义为：

$$\hat{a} \cdot \hat{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

点乘的几何意义是：它等于两个向量的模长乘以它们之间夹角的余弦值。即：

$$\hat{a} \cdot \hat{b} = |\hat{a}| |\hat{b}| \cos \theta$$

其中 $|\hat{a}|$ 和 $|\hat{b}|$ 分别是向量 \hat{a} 和 \hat{b} 的模长， θ 是它们之间的夹角。[点积可以获得投影值这个标量。](#)

2.2 叉乘 (叉积、向量积)

叉乘是两个向量之间的运算，结果是一个向量。对于两个向量 $\hat{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$ 和 $\hat{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$ ，它们的叉乘定义为：

$$\hat{a} \times \hat{b} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$$

叉乘的几何意义是：结果向量垂直于 \hat{a} 和 \hat{b} 所在的平面，其模长等于 \hat{a} 和 \hat{b} 组成的平行四边形的面积。即：

$$|\hat{a} \times \hat{b}| = |\hat{a}| |\hat{b}| \sin \theta$$

其中 $|\hat{a}|$ 和 $|\hat{b}|$ 分别是向量 \hat{a} 和 \hat{b} 的模长， θ 是它们之间的夹角。

叉积矩阵实际上是一个 $(0, 2)$ 型的张量。在张量代数中，叉积矩阵是一个二阶张量，它的两个指标都是协变指标（即没有上标的指标），这与 $(1, 1)$ 型张量不同，后者有一个逆变指标和一个协变指标。叉积矩阵在三维空间中表示两个向量的叉积，其结果是一个向量，而这个矩阵本身是 $(0, 2)$ 型的，因为它不涉及任何逆变指标（上标）。

2.3 在罗德里格斯公式中的应用

在罗德里格斯公式中，点乘和叉乘的计算如下：

1. **平行分量的计算**：

$$\vec{v}_{\parallel} = (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u}$$

这里， $\vec{v} \cdot \vec{u}$ 是点乘，结果是一个标量，表示 \vec{v} 在 \vec{u} 方向上的投影长度。然后，这个标量乘以 \vec{u} ，得到 \vec{v} 在 \vec{u} 方向上的分量 \vec{v}_{\parallel} 。

2. **垂直分量的计算**：

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel}$$

这里， \vec{v}_{\perp} 是 \vec{v} 减去其在 \vec{u} 方向上的分量，得到垂直于 \vec{u} 的分量。

3. **叉乘在垂直分量旋转中的应用**：

$$\vec{v}_{\perp rot} = |\vec{v}_{\perp}| \cos \theta \cdot \hat{b} + |\vec{v}_{\perp}| \sin \theta \cdot \hat{c}$$

其中， $\hat{c} = \hat{a} \times \hat{b}$ 是叉乘，结果是一个向量，垂直于 \hat{a} 和 \hat{b} 所在的平面。这个向量用于表示 \vec{v}_{\perp} 旋转后在垂直于 \hat{a} 平面内的分量。

通过这些计算，罗德里格斯公式能够将一个向量绕任意轴旋转特定角度。

3 线性代数中什么叫vector的normalize

在数学中，向量的归一化（Normalize）是指将一个非零向量的长度（或范数）缩放到1的过程。归一化后的向量称为单位向量（Unit Vector），其长度为1，但方向保持不变。

归一化向量的步骤如下：

1. 计算向量的长度（或范数）：对于一个 n 维向量 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ，其长度（或范数）通常使用欧几里得范数（也称为L2范数）来计算，公式为：

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

2. 将向量的每个分量除以向量的长度：得到归一化后的向量 \mathbf{u} ，公式为：

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left(\frac{v_1}{|\mathbf{v}|}, \frac{v_2}{|\mathbf{v}|}, \dots, \frac{v_n}{|\mathbf{v}|} \right)$$

归一化向量在许多数学和工程领域中非常重要，例如：

- 在几何学中，单位向量可以表示方向，而不受长度的影响。
- 在线性代数中，归一化向量常用于正交化和标准化过程，如Gram-Schmidt正交化。
- 在计算机图形学中，单位向量用于表示光线的方向和表面的法线。
- 在机器学习中，归一化向量可以用于数据预处理，以消除不同特征之间的量纲差异。

总之，向量的归一化是一个将向量长度缩放到1的过程，保持了向量的方向，同时简化了许多数学计算和应用。

4 解释一下图片内容

$$\vec{v}_{rot} = \vec{v} \cos \theta + (1 - \cos \theta)(\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u} + \sin \theta(\vec{u} \times \vec{v})$$

$$R = \cos \theta I + (1 - \cos \theta)\vec{u}\vec{u}^T + \sin \theta \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix}$$