张量起源

小圆滚滚

1 引言

看了Freya Holmer《Why Can't You Multiply Vectors?》

重新梳理了一遍人类认知数字的历程。

从自然数，0，1，累加1.到加减乘除，到指数（开方）。从整数、分数（有理数）、实数（增加了无理数）、复数（含有虚部）。

从大小（可比较）标量。到向量（含方向）。直到向量相乘。如何通过不到坐标轴的投影，而是到双向量的面积投影，来满足单位基矢的长度的平方等于长度。基于在任意坐标系下长度不变、物理法则不变。来完成对数学运算的定义。

向量，这个本身平移不变的特性，相加的特性，让其具备了分拆、组合、研究、计算、度量的能力。而作为多维线性空间的拓展。张量也应运而生。

1.1 向量的历史

艾萨克·牛顿（Isaac Newton）在17世纪发展了经典力学，他最先使用有向线段来表示物理量如力和速度的科学家之一，这可以看作是向量在物理学中的初步应用。

挪威测量学家威塞尔在18世纪末期首次利用坐标平面上的点来表示复数，并利用具有几何意义的复数运算来定义向量的运算，这是向量与复数几何表示的联系。

向量理论的产生和发展主要有三个来源：19世纪，物理学中的速度和力的平行四边形法则、位置几何、复数的几何表示。威廉·罗恩·哈密顿发展了四元数，这是现代向量系统发展的重要一步。向量空间理论开始形成，与线性方程组和行列式、矩阵理论的发展密切相关。

1.2 测地线

为了研究非欧几何中近似线性空间的变换，我们一个局部一个局部的去拼凑测地线。从而可以认知高维世界。反过来又重新定义了向量。

定义：测地线是三维物体表面上两点间的最短距离。在数学上，特别是在微分几何中，测地线可以定义为在局部区域内两点之间连线最短的路径。这个概念是平面上直线概念在曲面上的推广。

最小作用量：在物理学中，特别是在广义相对论里，测地线描述了自由下落粒子在引力场中的运动轨迹，这些轨迹是使得作用量最小的路径。

那么来利用张量的乘积，来反观向量线性变化的定义。就为输入对偶空间的余向量和线性空间的向量，以及输出结果的类型创造了更深层次的刘理解。

1.3 Freya Holmer

就像我们用泰勒展开式的线性主部来反观无穷小，用向量的乘法，双向量的投影来反观加减乘除带来的指数增长求幂运算。这里我们用张量的定义反观向量。

2 映射

2.1 张量的定义

张量是多线性映射，可以看作是向量和余向量的多线性组合。一个(r,s) 型张量T 是一个映射，它接受r 个余向量和s 个向量作为输入，并输出一个标量。

2.2 映射的定义

quantifiers（量词）符号：

- ”$\exists$”（存在）There exists，总有
- ”$\forall$”（意思是“对于所有的”或“对于每一个”。）Any，For all，对任意
- ”$\nexists$”（不存在）
- ”$\exists!$”（存在唯一）

唯一结果论：设f是从集合X到集合Y的映射，对Y的值域的所有元素（果）——像，都能在X中找到（因）——原像。

有两种可能性，

1. X定义域大于Y值域。而不可能值域大于定义域。
2. Y的一个结果可能由X中的两个元素重复（而不是同时）造成，也就是说唯一结果并不代表唯一原因。但是不会出现X的一个元素对应产生Y的两个结果。

我们利用射覆这两个字，而不是古代射覆游戏的本意。我们将两只箭射到同一个点，后一支箭射劈了前一支箭的情况做如下处理，我们假设所有的箭会化掉，最后只有一个命中点。对于所有击中点（值域），都能找到射过来的那只箭（定义域）。而箭笼则是定义域。

2.2.1 满射

映射，即是满射。

对$\forall y \in Y$总能找到至少一个$x \in X$满足$\varphi(x) = y$

注意：φ是变换过程，$\varphi(x)$是变换结果。

2.2.2 单射

对$\forall x, x' \in X$满足$x \neq x' \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(x')$

2.2.3 双射（一一映射/一一到上）

$\varphi : x \mapsto y$构成了集合X, Y之间的一一对应.

3 张量积的泛性质

对于数域P上的线性空间U,V,两者的张量积被定义为一个线性空间$U\otimes V$以及一个双线性映射$t: U\times V\to U\otimes V$,将$u\in U,v\in V$的像记作$u\otimes v$,双线性即满足:

$\forall u,u'\in U;v,v'\in V;p\in P$

$$\begin{cases}(u+u')\otimes v=u\otimes v+u'\otimes v\\ u\otimes(v+v')=u\otimes v+u\otimes v'\\ (pu)\otimes v=u\otimes(pv)=p(u\otimes v)\end{cases}$$

并且$U\otimes V$中的任意元素都可以表达为有限个形如$u\otimes v$的元素的线性组合, 即 $T\in U\otimes V$都可表达为:

$T=c_1u_1\otimes v_1+\cdots+c_ku_k\otimes v_k$

并且满足, $u\otimes v\neq 0$当且仅当$u\neq 0$且$v\neq 0$

这个张量积的构造也可以很容易地推广到多个线性空间的情况. 后面介绍的一些张量积相关的结论也将主要以两个空间的情况为例, 并且不难推广到多个空间的情况.

在数学人的表述中, 这种构造通常用自由线性空间和商空间来描述, 而张量积运算满足的上面那三个等式就是被商掉的等价关系.

与上面描述的这种构造直接相联系的, 就是张量的泛性质.

3.1 双线性性

如上一组数学表达式，描述了集合 U 和 V 之间的一个二元运算 $\otimes$ 的性质，以及这个运算与集合 P 中元素的相互作用。这些性质看起来像是定义了一个双线性映射或者张量积的性质。下面是对每个表达式的解释：

1. $(u+u')\otimes v=u\otimes v+u'\otimes v$：这个表达式说明，当你对集合 U 中的两个元素 u 和 u' 进行加法运算，然后将结果与集合 V 中的元素 v 进行 $\otimes$ 运算时，这等同于分别将 u 和 u' 与 v 进行 $\otimes$ 运算，然后将这两个结果相加。这表明 $\otimes$ 运算在 U 的加法上是分配的。

2. $u\otimes(v+v')=u\otimes v+u\otimes v'$：这个表达式说明，当你对集合 V 中的两个元素 v 和 v' 进行加法运算，然后将 U 中的元素 u 与这个结果进行 $\otimes$ 运算时，这等同于分别将 u 与 v 和 v' 进行 $\otimes$ 运算，然后将这两个结果相加。这表明 $\otimes$ 运算在 V 的加法上也是分配的。

3. $(pu)\otimes v=u\otimes(pv)=p(u\otimes v)$：这个表达式说明，当你将集合 P 中的元素 p 与 U 中的元素 u 相乘，然后将结果与 V 中的元素 v 进行 $\otimes$ 运算时，这等同于将 u 与 v 进行 $\otimes$ 运算，然后将结果与 p 相乘。同样，这也适用于将 p 与 v 相乘，然后将 u 与这个结果进行 $\otimes$ 运算。这表明 $\otimes$ 运算在 P 的乘法上是兼容的，并且 P 中的元素可以作为标量来缩放 $\otimes$ 运算的结果。

这些性质在数学的许多领域中都非常重要，特别是在线性代数和张量分析中。

3.2 双线性映射

以上的内容是对张量积的定义的进一步阐述。在数学中，特别是在线性代数和抽象代数领域，张量积是一个重要的概念，它允许我们以一种结构化的方式组合两个向量空间。以下是内容的解释：

1. **线性空间** U 和 V：这些是定义在数域 P 上的向量空间。

2. **张量积** $U\otimes V$：这是一个新的线性空间，它是通过 U 和 V 的张量积构造出来的。

3. **双线性映射** $t:U\times V\to U\otimes V$：这是一个函数，它将 U 和 V 中的元素对映射到 $U\otimes V$ 中。这个映射是双线性的，意味着它在两个参数上都是线性的。

4. **双线性性质**：结合上面的表达式，我们可以知道这个双线性映射 t 满足以下性质： - 加法分配性：$(u+u')\otimes v = u\otimes v + u'\otimes v$ 和 $u\otimes(v+v') = u\otimes v + u\otimes v'$。 - 标量乘法兼容性：$(pu)\otimes v = u\otimes(pv) = p(u\otimes v)$。

这些性质确保了张量积 $U\otimes V$ 具有一种自然的、与 U 和 V 的结构相兼容的方式。张量积在数学的许多领域中都有应用，包括物理学、工程学和计算机科学，特别是在处理多维数组和数据结构时。

3.3 为什么两个乘号不一样

在数学符号中，不同的乘号确实用来区分不同的概念或运算。在表达式 $t:U\times V\to U\otimes V$ 中，两个乘号分别代表不同的含义：

1. **笛卡尔积（Cartesian Product）** $\times$：符号 $\times$ 用于表示两个集合 U 和 V 的笛卡尔积。笛卡尔积是所有可能的有序对 (u,v) 的集合，其中 u 来自集合 U，v 来自集合 V。在数学中，这通常用于定义函数的定义域，或者在讨论两个集合的元素组合时使用。

2. **张量积（Tensor Product）** $\otimes$：符号 $\otimes$ 用于表示两个向量空间 U 和 V 的张量积。张量积是一种构造新向量空间的方法，它包含了 U 和 V 的所有元素，并且满足双线性映射的性质。张量积在数学的许多领域中都有应用，尤其是在线性代数和抽象代数中。

在表达式 $t:U\times V\to U\otimes V$ 中，函数 t 将笛卡尔积中的元素（有序对）映射到张量积空间中的元素。这种映射是双线性的，意味着它保持了加法和标量乘法的结构。通过这种方式，张量积 $U\otimes V$ 可以被看作是 U 和 V 的一种“扩展”或“组合”，它允许我们以一种结构化的方式处理来自两个不同空间的元素。

3.4 笛卡尔乘积有什么特点

在数学中，当我们提到两个集合 U 和 V 的笛卡尔乘积（Cartesian Product），我们指的是所有可能的有序对 (u,v) 的集合，其中 u 是集合 U 的元素，而 v 是集合 V 的元素。笛卡尔乘积的特点包括：

1. **有序性**：笛卡尔乘积中的元素是有序的。这意味着在有序对 (u,v) 中，u 和 v 的顺序是重要的。例如，(u,v) 和 (v,u) 被认为是两个不同的元素，除非 $u=v$。

2. **所有可能的组合**：笛卡尔乘积包括了第一个集合中的每个元素与第二个集合中的每个元素的所有可能组合。

3. **元素的类型**：笛卡尔乘积中的元素是有序对，它们是两个集合元素的组合，而不是单个元素的乘积。

4. **大小**：如果集合 U 有 m 个元素，集合 V 有 n 个元素，那么它们的笛卡尔乘积 $U\times V$ 将有 $m\times n$ 个元素。

5. **定义域**：在函数的定义中，笛卡尔乘积常用于定义函数的定义域。例如，如果一个函数 f 从 $U\times V$ 映射到某个集合 W，那么 f 的定义域就是所有可能的有序对 (u,v)。

6. **关系和矩阵**：在关系数据库和矩阵理论中，笛卡尔乘积的概念非常重要。在数据库中，它用于生成所有可能的行对，而在矩阵中，它可以用于定义矩阵乘法的元素。

7. **几何解释**：在几何学中，笛卡尔乘积可以被看作是两个集合的“网格”或“网状结构”，其中每个点代表一个有序对。

笛卡尔乘积是数学中一个基础的概念，它在多个领域中都有广泛的应用。在张量积的上下文中，笛卡尔乘积用于构建张量积空间的基础，然后通过双线性映射 t 将这些有序对映射到张量积空间中的元素。

3.5 商掉的等价关系

在数学中，特别是在线性代数和抽象代数领域，自由线性空间（Free Linear Space）和商空间（Quotient Space）是构造新空间的两个重要概念。张量积的构造可以通过这两个概念来理解，下面是对这句话的详细解释：

1. **自由线性空间**：给定一个集合 S，自由线性空间是由 S 生成的所有可能的线性组合构成的空间。这意味着空间中的任何元素都可以表示为 S 中元素的线性组合，且这些线性组合是唯一的。在张量积的构造中，我们首先考虑由所有有序对 (u, v) 生成的自由线性空间，其中 $u \in U$ 和 $v \in V$。

2. **商空间**：商空间是通过在某个线性空间上定义一个等价关系，并考虑这些等价类来构造的。在张量积的构造中，我们定义了一个等价关系，这个关系将满足特定性质的元素视为等价。具体来说，就是上面提到的三个等式所描述的性质。

3. **张量积运算满足的等式**：这些等式描述了张量积的双线性性质，即： - $(u + u') \otimes v = u \otimes v + u' \otimes v$ - $u \otimes (v + v') = u \otimes v + u \otimes v'$ - $(pu) \otimes v = u \otimes (pv) = p(u \otimes v)$

这些等式定义了在自由线性空间中哪些元素是等价的。例如，如果两个元素在进行加法或标量乘法后得到相同的结果，那么它们在张量积空间中被认为是等价的。

4. **被商掉的等价关系**：在构造张量积空间时，我们通过定义等价关系来“商掉”或“消除”自由线性空间中的某些元素。具体来说，就是将所有满足上述等式的元素视为等价，并在商空间中只保留一个代表。这样，张量积空间 $U \otimes V$ 就成为了一个线性空间，其中的元素是原始自由线性空间中元素的等价类。

通过这种方式，张量积空间 $U \otimes V$ 继承了 U 和 V 的线性结构，同时满足了双线性映射的性质。这种构造方法在数学中非常常见，它允许我们以一种抽象和通用的方式处理线性结构。

3.6 张量积的元素表示

关于张量积 $U \otimes V$ 的性质的进一步描述。让我们来逐一解释这些性质：

1. **张量积的元素表示**：张量积空间 $U \otimes V$ 中的任意元素 T 都可以表达为有限个形如 $u \otimes v$ 的元素的线性组合。这意味着 T 可以写成以下形式：

$$T = c_1 u_1 \otimes v_1 + c_2 u_2 \otimes v_2 + \cdots + c_k u_k \otimes v_k$$

其中，c_i 是标量，u_i 是 U 中的元素，v_i 是 V 中的元素，k 是一个有限的正整数。

2. **非零条件**：张量积 $u \otimes v$ 不为零的充分必要条件是 u 和 v 都不为零。这意味着如果 u 或 v 中的任何一个为零，那么 $u \otimes v$ 也将为零。这个性质是张量积的一个重要特征，它确保了张量积空间中的元素与其构成元素的非零性之间有直接的联系。

这些性质是张量积空间的基本特征，它们确保了张量积空间能够以一种结构化的方式捕捉和表示两个向量空间 U 和 V 的组合信息。通过这种方式，张量积空间 $U \otimes V$ 成为了一个能够反映 U 和 V 之间相互作用的新的空间。

为什么T是一种加和的形式?

在张量积 $U \otimes V$ 的上下文中，元素 T 被表达为加和的形式，这主要是由于以下几个原因：

1. **线性空间的性质**：张量积 $U \otimes V$ 本身是一个线性空间。在线性空间中，加法和标量乘法是定义良好的运算，且这些运算满足线性空间的公理，包括加法的交换律、结合律，以及标量乘法对加法的分配律等。

2. **张量积的定义**：张量积是通过双线性映射 $t: U \times V \to U \otimes V$ 定义的，这个映射将 U 和 V 中的元素对 (u, v) 映射到 $U \otimes V$ 中的元素 $u \otimes v$。双线性映射的性质意味着 $u \otimes v$ 的构造是线性的，即它满足加法和标量乘法的分配性。

3. **生成元的线性组合**：张量积空间 $U \otimes V$ 可以由形如 $u \otimes v$ 的元素生成。这意味着 $U \otimes V$ 中的任何元素都可以表示为这些生成元的线性组合。这是线性空间的一个基本特性，即任何元素都可以表示为一组基的线性组合。

4. **自由线性空间的商**：在构造张量积时，我们从一个自由线性空间开始，这个空间由所有可能的 (u, v) 对生成。然后，我们通过定义等价关系（即双线性映射的三个等式）来构造商空间。在这个过程中，等价类中的元素可以相加，形成新的等价类，这就是为什么 T 可以表示为加和的形式。

5. **张量积的普遍性质**：张量积具有普遍性质，即对于任何双线性映射 $B: U \times V \to W$ 到另一个向量空间 W，都存在唯一的线性映射 $\tilde{B}: U \otimes V \to W$ 使得 $B = \tilde{B} \circ t$。这个性质保证了张量积的构造与 U 和 V 的具体选择无关，而是由它们的线性结构决定。

因此，T 作为加和的形式，是张量积空间线性结构的直接结果，同时也是张量积定义和性质的体现。

上面的$\circ$代表什么运算?

在数学中，符号 $\circ$ 通常用来表示函数的复合运算。当我们有两个函数 f 和 g，并且想要表示先应用 g 然后应用 f 的操作时，我们会使用 $f \circ g$ 来表示这个复合函数。具体来说，如果 $f: A \to B$ 和 $g: C \to A$，那么复合函数 $f \circ g: C \to B$ 定义为：

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

对于所有的 x 在 C 中。这意味着对于 C 中的任意元素 x，首先将 g 应用于 x，然后将 f 应用于 $g(x)$ 的结果。

内容中，$f = \tilde{f} \circ t$ 表示双线性映射 f 可以通过线性映射 $\tilde{f}$ 与双线性映射 t 的复合来实现。也就是说，对于 $U \times V$ 中的任意元素 (u, v)，先通过 t 映射到 $U \otimes V$，然后再通过 $\tilde{f}$ 映射到 Z，这与直接通过 f 映射到 Z 是等价的。

张量积的泛性质确保了在同构意义下的唯一性。这个概念可以这样理解：

1. **泛性质的定义**：对于任意两个向量空间 U 和 V，以及它们的张量积空间 $U \otimes V$ 和双线性映射 $t: U \times V \to U \otimes V$，泛性质表明，对于任意向量空间 Z 和任意双线性映射 $f: U \times V \to Z$，存在唯一的线性映射 $\tilde{f}: U \otimes V \to Z$ 使得 $f = \tilde{f} \circ t$。

2. **同构意义下的唯一性**：如果存在两个不同的张量积空间 $U \otimes V$ 和 $U' \otimes V'$，它们都满足泛性质，那么根据泛性质，我们可以构造两个线性映射 $\varphi: U \otimes V \to U' \otimes V'$ 和 $\psi: U' \otimes V' \to U \otimes V$，使得它们互为逆映射。这是因为，对于 $U' \otimes V'$，我们可以将 t 视为 f，从而得到 φ，反之亦然得到 ψ。

3. **同构映射**：如果两个结构之间存在一一对应的关系，并且这个关系保持了结构的特性，那么这两个结构被称为同构的(章节11)。在张量积的情况下，φ 和 ψ 作为逆映射，意味着它们都是双射的，并且保持了线性结构，因此它们是同构映射。

4. **结论**：由于 φ 和 ψ 是同构映射，我们可以得出结论，尽管张量积空间 $U \otimes V$ 在构造上可能有所不同，但它们在同构意义下是等价的。这意味着，不同的构造方法得到的张量积空间在结构上是相同的，它们之间可以通过同构映射相互转换。

因此，泛性质不仅定义了张量积，还保证了其在同构意义下的唯一性。这种唯一性是张量积理论的一个基本特性，它确保了张量积空间的通用性和一致性。

4 定理

4.1 定理1：张量积的泛性质

对线性空间U, V, 其张量积空间$U \otimes V$以及双线性映射$t : U \times V \to U \otimes V$满足, 对于任意一个线性空间$Z$和双线性映射$f : U \times V \to Z$, 存在唯一的线性映射$\tilde{f} : U \otimes V \to Z$使得$f = \tilde{f} \circ t$, 也就是下图交换:

$$\begin{tikzcd}
U \times V \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "f"'] & U \otimes V \arrow[d, "\exists! \tilde{f}"] \\
& Z
\end{tikzcd}$$

并且, 这个泛性质在同构的意义下唯一确定了$U \otimes V$, 从而这个泛性质也可以直接作为张量积的定义.

泛性质也可以推广到多个线性空间的张量积, 只要把双线性映射换成多线性映射就可以了.

证明:

先来证明之前构造出的张量积空间满足这个泛性质.

由定义,$\tilde{f}$需要满足的条件是$f = \tilde{f} \circ t$, 也就是说:

$\tilde{f}(u \otimes v) = f(u, v)$

由于$u \otimes v$是对u, v双线性的, 而$\tilde{f}$是线性的, 从而$\tilde{f}(u \otimes v)$是也对u, v双线性的, 可知上面这个等式自洽.

而对于给定的f, 根据上面这个等式可以把线性映射$\tilde{f}$唯一确定下来. 实际上, 根据$\tilde{f}$的线性性可知, $U \otimes V$中任意一般元素$T = c_1 u_1 \otimes v_1 + \cdots + c_k u_k \otimes v_k$的像都被唯一确定为:

$\tilde{f}(c_1 u_1 \otimes v_1 + \cdots + c_k u_k \otimes v_k) = c_1 f(u_1, v_1) + \cdots + c_k f(u_k, v_k)$

从而证明了$\tilde{f}$唯一存在.

接下来证明仅靠泛性质所确定的张量积在同构的意义下就是唯一的.

其实这个唯一性对后面的内容没什么影响, 这部分证明不想看跳过也可以.

给定线性空间U, V, 假设有两个"张量积"空间$U \otimes V, U \otimes' V$都满足张量积的泛性质, 那么考虑下图:

$$
\begin{tikzcd}
 & U \otimes V \arrow[d, "f"] \arrow[dd, bend left=60, "h=g\circ f"] \\
U \times V \arrow[ur, "t"] \arrow[r, "t'"] \arrow[dr, "t"'] & U \otimes' V \arrow[d, "g"] \\
 & U \otimes V
\end{tikzcd}
$$

t和t'这两个双线性映射都是已有的, 根据泛性质我们知道存在唯一的线性映射f, g使得上下两个小三角形交换, 即$f \circ t = t', g \circ t' = t$, 从而外面的大三角形交换, 即$g \circ f \circ t = t$.

考虑大三角形, 根据泛性质可以知道, 存在唯一的h使得$h \circ t = t$.显然单位映射id满足h所需满足的条件, 而前面已经知道$g \circ f$也满足条件, 因此一定有$g \circ f = \mathrm{id}$, 这样

$f : U \otimes V \to U \otimes' V$ 是同构映射, 即 $U \otimes V$ 和 $U \otimes' V$ 是同构的.

其实从更数学的角度来看, 在范畴论的框架下, 张量积的唯一性是由始对象的性质保证的, 而上面这个证明也就是把始对象的相关证明过程在这个特例上复述了一遍.

在一些数学人的教材中, 是先从泛性质引入张量, 然后再引入构造性的定义, 这样可能不够形象, 不过动机更清晰.

不难看出, 张量积的泛性质的含义也可以这么解读: 当我们想要确定一个$\Phi : U \otimes V \to Z$的线性映射时, 只要确定了形如$u \otimes v$的元素在Z中的像之后, 这整个映射Φ也就唯一确定了. 这个操作非常实用, 在本文后面的部分中也将会经常出现.

关于张量积空间, 有两个比较显然的性质还是需要提一下:

4.2 定理2：张量积空间的交换律

U, V是线性空间, 那么有:

$U \otimes V = V \otimes U$

证明:

很显然, 只要按照如下方式构建$U \otimes V$和$V \otimes U$之间的同构:

$I : U \otimes V \to V \otimes U$

$I(u \otimes v) = v \otimes u$

根据张量积的泛性质, 不管从左到右还是从右到左都可以给出两个空间之间的线性映射, 而且显然从左到右和从右到左给出的映射是互逆的, 可见这确实是同构.

补充说明: 或许有人想到在张量中很多时候都有$u \otimes v \neq v \otimes u$, 看似和这个结论相冲突, 但其实两者

是没什么关系的, 因为$U \otimes V = V \otimes U$针对的是**两个线性空间空间的同构**, 而$u \otimes v \neq v \otimes u$针对的是**同一个空间的两个元素的比较**.而且, 后者仅在形如$V \otimes V$这样**两个相同空间的张量积**才有意义, 显然跟这个定理说的内容没有直接关系.

4.3 定理3：张量积空间的结合律

U, V, W是线性空间, 那么有:

$(U \otimes V) \otimes W = U \otimes (V \otimes W) = U \otimes V \otimes W$

证明:

只要按照如下方式构建$U \otimes V \otimes W$和$(U \otimes V) \otimes W$之间的同构:

$I : U \otimes V \otimes W \to (U \otimes V) \otimes W$

$I(u \otimes v \otimes w) = (u \otimes v) \otimes w$

由张量积的泛性质, 显然从左到右给出了一个线性映射, 至于从右到左, 可以这么理解:

对于任意一个线性空间Z, 想确定一个$f : (U \otimes V) \otimes W \to Z$线性映射, 只需要确定$T \otimes w$在$Z$中的像$f(T \otimes w)$就可以了, 其中$T \in U \otimes V, w \in W$,而$(T, w) \mapsto f(T \otimes w)$是双线性的, 固定了$w$之后对$T$就是线性的, 因此只要确定了$T$形如$u \otimes v$的情况下的像$f((u \otimes v) \otimes w)$, 就可以确定一般$T$对应的像$f(T \otimes w)$.这样的话, 只要确定$(u \otimes v) \otimes w$在映射$f$下在$Z$中的像, 就确定了线性映射$f$.

从而从左到右和从右到左给出互逆的线性映射, 可见这确实是同构.

接下来考虑基矢:

4.4 定理4：有限维空间张量积空间的基矢

对于有限维线性空间U, V, 各取一组基$\{s_1, \cdots, s_m\} \subset U, \{e_1, \cdots, e_n\} \subset V$, 那么

$\{s_\mu \otimes e_\nu | 1 \leqslant \mu \leqslant m, 1 \leqslant \nu \leqslant n\}$

可以作为$U \otimes V$的一组基矢. 而且, 从中不难得知$U \otimes V$的维度为

$\dim U \otimes V = (\dim U)(\dim V)$

这个结论也不难推广到更多空间的张量积.

证明:

首先我们知道每个$T \in U \otimes V$都可以表示为有限个形如$u \otimes v$元素的线性组合, 而每个$u \otimes v$又可以如下展开:

$u \otimes v = \left(\sum_{\mu=1}^m u^\mu s_\mu\right) \otimes (\sum_{\nu=1}^n v^\nu e_\nu) = \sum_{\mu,\nu} u^\mu v^\nu s_\mu \otimes e_\nu$

从而$U \otimes V$的元素都可展开为$s_\mu \otimes e_\nu$的线性组合.

接下来证明各个$s_\mu \otimes e_\nu$线性无关.

1. **假设线性组合为零**：首先，我们假设存在一组系数 $T^{\mu\nu}$ 使得这些系数与 $s_\mu \otimes e_\nu$ 的线性组合为零：

$$\sum_{\mu,\nu} T^{\mu\nu} s_\mu \otimes e_\nu = 0$$

2. **定义线性映射**：接着，定义一个线性映射 $\tau^{\mu\nu} : U \otimes V \to P$ 为：

$$\tau^{\mu\nu}(u \otimes v) \mapsto u^\mu v^\nu$$

其中 $1 \leq \mu \leq m$ 和 $1 \leq \nu \leq n$。这里 u^μ 和 v^ν 分别是 u 和 v 在基 $\{s_\mu\}$ 和 $\{e_\nu\}$ 下的分量。

3. **双线性性质**：由于映射 $u \mapsto u^\mu$ 和 $v \mapsto v^\nu$ 都是线性的，因此 $(u,v) \mapsto u^\mu v^\nu$ 是双线性的。这意味着 $\tau^{\mu\nu}$ 是一个双线性映射，因此定义是合理的。

4. **应用线性映射**：将线性映射 $\tau^{\mu\nu}$ 应用于原始的线性组合，我们得到：

$$0 = \tau^{\mu\nu}\left(\sum_{\mu',\nu'} T^{\mu'\nu'} s_{\mu'} \otimes e_{\nu'}\right) = \sum_{\mu',\nu'} T^{\mu'\nu'} \tau^{\mu\nu}(s_{\mu'} \otimes e_{\nu'})$$

由于 $\tau^{\mu\nu}(s_{\mu'} \otimes e_{\nu'}) = \delta^\mu_{\mu'}\delta^\nu_{\nu'}$（克罗内克 δ 函数，当指标相等时为1，否则为0），上式简化为：

$$\sum_{\mu',\nu'} T^{\mu'\nu'} \delta^\mu_{\mu'}\delta^\nu_{\nu'} = T^{\mu\nu}$$

5. **得出结论**：由于 $T^{\mu\nu} = 0$ 对所有的 μ 和 ν 成立，这意味着原始的线性组合中的所有系数都必须为零。因此，$s_\mu \otimes e_\nu$ 是线性无关的。

这个证明展示了如何通过假设线性组合为零并应用双线性映射来证明张量积空间中基元素的线性无关性。这是线性代数中一个常见的技巧，用于证明向量空间的基的线性无关性。

至于张量的泛性质的观点跟张量的多重线性函数观点之间的联系, 就是下面这个定理:

4.5 定理5：对偶空间的张量积

对于有限维空间U, V, 它们的对偶空间为U^*, V^*, 记$U \times V$到数域P的全体双线性映射(函数)构成的线性空间为$L(U,V;P)$, 其加法和数乘自然地由函数值的加法和乘法给出, 那么有:

$U^* \otimes V^* = L(U,V;P)$

当然如果考虑$U \otimes V$的话, 由于$U^{**} = U, V^{**} = V$, 相应的关系自然就是

$U \otimes V = L(U^*, V^*; P)$

这个结论同样也不难推广到更多空间的张量积.

证明:

考虑构造一个线性映射$I : U^* \otimes V^* \to L(U,V;P)$, 使得$\omega \otimes \varphi \in U^* \otimes V^*$的像$I(\omega \otimes \varphi)$满足:

$I(\omega \otimes \varphi)(u,v) = \omega(u)\varphi(v)$

其中$u \in U, v \in V$.

接下来证明这个映射是同构, 只要证明I把$U^* \otimes V^*$的基矢映射为$L(U,V;P)$的基矢.

我们已经知道, $U^* \otimes V^*$的一组基是$\{s^{*\mu} \otimes e^{*\nu}\}$, 其中$s^{*\mu}, e^{*\nu}$分别是$U^*, V^*$中的对偶基矢. 我们需要证明的是每个$\Phi \in L(U,V;P)$都可以唯一地展开为$I(s^{*\mu} \otimes e^{*\nu})$的线性组合.

其实, 对于给定的$\Phi \in L(U,V;P)$, 我们只要定义一组数$\Phi_{\mu\nu}$如下:

$\Phi_{\mu\nu} = \Phi(s_\mu, e_\nu)$

那么就可以验证, Φ可以展开为:

$\Phi = \sum_{\mu,\nu} \Phi_{\mu\nu} I(s^{*\mu} \otimes e^{*\nu})$

$\forall u \in U, v \in V$

左边:$\Phi(u,v) = \Phi\left(\sum_{\mu=1}^m u^\mu s_\mu, \sum_{\nu=1}^n v^\nu e_\nu\right)$

$= \sum_{\mu,\nu} \Phi(s_\mu, e_\nu) u^\mu v^\nu = \sum_{\mu,\nu} \Phi_{\mu\nu} u^\mu v^\nu$

右边: $\left(\sum_{\mu,\nu} \Phi_{\mu\nu} I(s^{*\mu} \otimes e^{*\nu})\right)(u,v)$

$= \sum_{\mu,\nu} \Phi_{\mu\nu}\, s^{*\mu}(u)\, e^{*\nu}(v) = \sum_{\mu,\nu} \Phi_{\mu\nu} u^\mu v^\nu$

从而$I(s^{*\mu} \otimes e^{*\nu})$确实是$U^* \otimes V^*$的一组基, 因此映射$I$是同构.

另外, 从上面的关系中还可以衍生出一个结论:

4.6 定理6：

对于有限维空间U, V, 有:

$U^* \otimes V^* = (U \otimes V)^*$

证明:

刚才我们已经证明了$U^* \otimes V^* = L(U, V; P)$, 所以这里我们只需要证明$L(U, V; P) = (U \otimes V)^*$就可以了.

由定义, $L(U, V; P)$里的元素是所有$U \times V \to P$的双线性映射,

而$(U \otimes V)^*$的元素是所有$U \otimes V \to P$的线性映射,

根据张量积的泛性质可知两者一一对应, 并且不难验证两个空间之间的这个对应是线性的,

因此$L(U, V; P) = (U \otimes V)^*$

最后就是常见的(k, l)型张量的概念:

4.7 定理7：线性空间V上的(k, l)型张量：

线性空间V上(k, l)型张量空间被定义为k个V和l个V^*的张量积空间, 即：

$\mathcal{T}_V(k, l) \equiv \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{l}$

这里面的元素就被叫做(k, l)型张量.

显然, 矢量就是(1,0)型张量, 对偶矢量就是(0,1)型张量.

另外也要留意一下多重线性函数的观点:

在多重线性函数的观点下, 张量就是这样一个带有k个上输入槽和l个下输入槽的”机器”:

$T^{(\cdot,\ \ldots\ ,\cdot)}_{(\cdot,\ \ldots\ ,\cdot)} : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{k} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{l} \to P$

上槽输入对偶矢量, 下槽输入矢量, 给出一个数.

并且张量的分量可以表示为:

$T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_l} = T^{(e^{*\mu_1}, \cdots, e^{*\mu_k})}_{(e_{\nu_1}, \cdots, e_{\nu_l})}$

由张量积空间的交换律和结合律容易得知, 一个(k, l)型张量和一个(m, n)型张量进行张量积就可以得到一个$(k + m, l + n)$型张量, 并且由定理6(4.6)易得

$\mathcal{T}_V(k, l)^* = \mathcal{T}_V(l, k)$

不难验证, 一个线性空间上各种型号张量的张量积运算在形式上满足结合律.

5 (k, l)型张量的抽象指标与缩并运算

5.1 抽象指标

在有关(k, l)型张量的计算中, 有一个细节, 那就是张量积运算在形式上不满足交换律:

比如说, 以$V \otimes V$中的元素为例(即(2,0)型张量),

对于$v, w \in V$, 在一般情况下$v \otimes w \neq w \otimes v$,

这是因为, 在张量积映射$V \times V \to V \otimes V$中, 两者分别对应$(v, w) \mapsto v \otimes w$和$(w, v) \mapsto w \otimes v$, 说的不是一回事,

本质上, 这也就是需要区分清楚张量积$u \otimes v$中的u和v分别来自于哪个V.

在目前的记号下, 我们不得不通过张量积的不同”前后顺序”来区分它们.

但其实, 我们还可以换一种做法:

考虑将V和V^*的多份复制用不同的字母标号区分, 用带上标形如$V^a, V^b \cdots$表示V的复制, 而带下标如$V_c, V_d \cdots$表示V^*的复制, 将它们视作**不同的空间**,

并且来自这些带字母标号的矢量与对偶矢量也要带上相应的字母标号:

$u^a, v^a, \cdots \in V^a$; $u^b, v^b, \cdots \in V^b$

$\varphi_c, \omega_c, \cdots \in V_c$; $\varphi_d, \omega_d, \cdots \in V_d$

然后从中选取带有不同字母标号的空间来构建张量空间,

比如说(2, 0)型张量空间可以被构造为$V^a \otimes V^b$,

而里面形如$v \otimes w$的元素也带上相应的字母标号, 写成$v^a w^b$.

这个时候就可以用字母标号来区分张量积$v^a w^b$中的v和w来自于哪个V（V^a或者V^b）, 对应关系如下:

$V \otimes V \rightsquigarrow V^a \otimes V^b$

$v \otimes w \rightsquigarrow v^a w^b$

$w \otimes v \rightsquigarrow w^a v^b$

由于用字母标号做了区分, 我们可以令$v^a w^b = w^b v^a$而不产生歧义, 也就是说张量积运算可以带着字母标号交换顺序, 而原先张量积的不可交换性体现为$v^a w^b \neq w^a v^b$.

由于在书写上不必用前后顺序强调张量积的不可交换性, 张量积符号$\otimes$在习惯上可以省去不写.

而更一般的元素$T \in V^a \otimes V^b$也会很自然地带有字母标号:

$T^{ab} = c_1 (u_1)^a (v_1)^b + \cdots + c_k (u_k)^a (v_k)^b$

一般张量的张量积运算也很简单, 只要直接"相乘"就可以了:

$M \otimes v \rightsquigarrow M^a{}_b v^c$

并且形式上遵从结合律, 同样省略张量积符号.

这些字母标号就叫**抽象指标**.

注意到, 一个张量所带有的抽象指标正是对应于所有那些参与张量积的空间所带有的指标, 可以说, **张量的抽象指标本质上代表了它所在的张量空间, 或者更具体地, 构成此空间的那些(带指标的)空间.**（$T^{ab}{}_c$的a, b, c分别代表$V^a \otimes V^b \otimes V_c$中的$V^a, V^b, V_c$）

从张量的抽象指标数量可以一眼看出张量的型号, (k, l)型张量就有k个上指标和l个下指标.

顺便一提, 抽象指标记号下张量积空间的写法也可以简化:

有了抽象指标, 线性空间之间张量积的符号也可以省去, 比如$V^a \otimes V^b \otimes V_c$可以简写成$V^a V^b V_c$或者还可以再进一步简化, 写成: V^{ab}_c.

虽然抽象指标字母可以任意选, 但在书写时, 我们要注意指标平衡:

比如, 我们可以写$pv^a + u^a = w^a, pv^b + u^b = w^b$, 但不可以写$pv^a + u^b = w^a$.

这本质上是因为要保证在考虑到抽象指标的意义下, 相加减的以及等号两边的张量处于同一个空间中, 而一开始选取不同的抽象指标字母本质上就是选取了不同的空间.

矢量, 对偶矢量以及张量在基矢下的展开式 (如$T = \sum_{\mu,\nu,\rho} T^{\mu\nu}{}_\rho e_\mu \otimes e_\nu \otimes e^{*\rho}$现在写成:

$$v^a = \sum_\mu v^\mu (e_\mu)^a,\ \varphi_a = \sum_\mu \varphi_\mu (e^\mu)_a$$

$$T^{ab}{}_c = \sum_{\mu,\nu,\rho} T^{\mu\nu}{}_\rho (e_\mu)^a (e_\nu)^b (e^\rho)_c$$

由于$(e^\mu)_a$的下标a已经表明它是对偶基矢, 原先$e^{*\mu}$的$*$就可以省去不写了.

在书写习惯上, 张量的抽象指标的位置和分量上表示分量编号的指标位置应当相互对应, 正如上面三个式子那样.

抽象指标和表示分量编号的指标位置虽然相同, 但前者的字母并不像后者的字母那样表示具体的数, 而是类似于$\vec{v}$上面的$\rightarrow$, 这就是为什么这些**英文字母标号**叫做"抽象指标"; 相应地, 分量上那些表示具体数的**希腊字母指标**就叫"具体指标".

其实, 我们还可以考虑类似$\sum_{\nu,\rho} T^{\mu\nu}{}_{\rho} e_\nu \otimes e^{*\rho}$这种东西, 这可以写成一种抽象指标和具体指标混合的表达式:

$$T^{\mu b}{}_{c} \equiv \sum_{\nu,\rho} T^{\mu\nu}{}_{\rho}\,(e_\nu)^b (e^\rho)_c$$

这个$T^{\mu b}{}_{c}$还满足:

$$T^{ab}{}_{c} = \sum_{\mu} T^{\mu b}{}_{c} (e_\mu)^a$$

一方面, 这个表达式介于完整的张量和纯粹的分量之间, 另一方面, 这个表达式也可以看成是一系列的$(1,1)$张量构成的"数组".

另外, 关于抽象指标的位置, 还有一些必须要注意的书写规范:

习惯上来讲, 我们会**把上下指标错开来写**, 写成$T^{ab}{}_{c}$

而不是T^{ab}_{c}, 因而我们可以谈及 **(从左到右的)第n个指标是上标还是下标**, 这样写的话在之后涉及到度规升降指标的时候就不会出现混乱.

当然, 在定义张量时, 你把指标的位置写成$S^{a}{}_{b}{}^{c}$分量相应写作$S^{\mu}{}_{\nu}{}^{\rho}$这样也是没问题的. 要注意的是, 为了避免歧义, **一个张量一旦定义好了之后, 指标的位置就固定了, 你不能把同一个张量一会儿写成$T^{ab}{}_{c}$一会儿写成$T^{a}{}_{b}{}^{c}$.**

不过, 在同一个空间中可以去考虑类似于$T^{ab}{}_{c}$和$T^{ba}{}_{c}$这样的形式, 但两者之间一般不能划等号, 这其实代表一种运算, 接下来会讲到.

接下来就展示一种运算:

5.2 "交换指标"运算:

考虑(k,l)型张量, 其中$k \geqslant 2$, 我们定义一个$\mathcal{T}_V(k,l) \to \mathcal{T}_V(k,l)$的映射, 使得:

$v \otimes w \otimes \cdots \mapsto w \otimes v \otimes \cdots$

其中$v, w \in V$.

根据张量积的泛性质, 这唯一给出了$\mathcal{T}_V(k,l) \to \mathcal{T}_V(k,l)$的一个线性映射.

注意到在抽象指标记号下, 上面这个式子写成:

$v^a w^b \cdots \mapsto w^a v^b \cdots = v^b w^a \cdots$

也就是交换了来自V^a和V^b的矢量. 对更一般的元素来说, 这个操作就可以很自然地写成:

$T^{ab\cdots}{}_{\cdots} \mapsto T^{ba\cdots}{}_{\cdots}$

这也就明确了交换抽象指标的含义.

当然, 除了交换前两个指标以外, 还可以交换任意选定的两个上指标, 或者两个下指标(但是不能交换一个上指标和一个下指标, 因为原空间和对偶空间不是同一种空间). 可以看出, 在抽象指标记号下可以很方便地分别表达出这些运算.

其实, 在很多地方都涉及到的张量的对称性/反对称性定义以及对称化/反对称化操作, 正是以这种"指标交换"为基础的.

在后面我们也会看到, 对一个张量进行一个线性操作的时候, 针对各个抽象指标进行的操作某种程度上代表了在利用泛性质定义线性映射时, 对形如$v \otimes w \otimes \cdots$这样元素中的这些矢量进行的操作.

5.3 缩并运算:

对于(k,l)型张量$(k,l\geqslant 1)$, 我们可以基于张量积的泛性质定义张量的(i,j)缩并运算为:

$C^i_j:\mathcal{T}_V(k,l)\to\mathcal{T}_V(k-1,l-1)$

$C^i_j(v_1\otimes\cdots\otimes v_k\otimes\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_l)=\varphi_j(v_i)\,v_1\otimes\cdots\otimes v_{i-1}\otimes v_{i+1}\cdots\otimes\varphi_{j-1}\otimes\varphi_{j+1}\cdots\otimes\varphi_l$

这个缩并针对的是第i个原矢量空间V和第j个对偶空间V^*.

在抽象指标下, 我们以相同字母的指标表示对偶矢量跟矢量的作用, 规定:

$\varphi_a v^a\equiv\varphi(v)$

以(2,1)型张量的一个缩并运算为例, 抽象指标记号下缩并运算的定义式写为:

$C^1_1: v^a w^b\varphi_c\mapsto(v^a\varphi_a)w^b=v^a w^b\varphi_a$

这样, 一般(2,1)型张量$T^{ab}{}_c$的缩并就记为:

$T^{ab}{}_c\mapsto T^{ab}{}_a$

也就是说, **抽象指标的上下一对字母重复表示缩并**, 并且根据重复的是哪一对指标, 就可以很方便地指定缩并针对的是哪两个空间.

当然, 同在上或同在下的指标字母重复, 或者出现三个指标字母重复的写法是不合法的.

值得注意的是, $T^{ab}{}_c$是$V^aV^bV_c$中的元素, 而缩并之后得到的$T^{ab}{}_a$是V^b中的元素,

缩并之后字母a已经不对应任何实际的空间了, 或者说$T^{ab}{}_a$只有b个有效的指标 (更直观来看,

$v^a w^b\varphi_a$中关于a的部分已经全部变成纯粹的数), 因此缩并的一对的指标被称为**哑指标**.

我们来考虑张量缩并运算的分量表达式:

以$T^{ab}{}_c=\sum_{\mu,\nu,\rho}T^{\mu\nu}{}_\rho(e_\mu)^a(e_\nu)^b(e^\rho)_c$为例, 缩并之后变成:

$T^{ab}{}_a=\sum_{\mu,\nu,\rho}T^{\mu\nu}{}_\rho(e_\mu)^a(e_\nu)^b(e^\rho)_a$

$=\sum_{\mu,\nu,\rho}T^{\mu\nu}{}_\rho\delta^\rho_\mu(e_\nu)^b=\sum_\nu\left(\sum_\mu T^{\mu\nu}{}_\mu\right)(e_\nu)^b$

其实等式的最右边按指标混合的写法也可以写成$\sum_\mu T^{\mu b}{}_\mu$

这样, $T^{ab}{}_a$的分量就是$\sum_\mu T^{\mu\nu}{}_\mu$.

也就是说, 一个张量缩并一对抽象指标, 其分量就是对相应的那对具体指标取相同值进行全范围求和.

关于缩并运算, 还有两个比较基础的例子:

5.3.1 例1

考虑张量的多重线性映射观点:

以(2,1)型张量T为例, 输入矢量$u\in V$以及对偶矢量$\varphi,\omega\in V^*$就可以给出一个数:$T^{(\varphi,\omega)}_{(u)}$

注意到, 我们可以固定φ,ω,u不变,

这样$T\mapsto T^{(\varphi,\omega)}_{(v)}$就给出一个从$\mathcal{T}_V(2,1)$到$P$的线性映射, 由$\varphi,\omega,v$所决定.

根据之前定理5(4.5)的证明过程, 我们知道, 形如$v\otimes w\otimes\theta$的这种张量所对应的多重线性函数被确定为:

$(v\otimes w\otimes\theta)^{(\varphi,\omega)}_{(u)}=v(\varphi)\cdot w(\omega)\cdot\theta(u)$

$=(v^a\varphi_a)(w^b\omega_b)(\theta_c u^c)=(v^a w^b\theta_c)\varphi_a\omega_b u^c$

也就是说, 刚才提到的这个$\mathcal{T}_V(2,1)\to P$的线性映射满足:

$v^a w^b\theta_c\mapsto(v^a w^b\theta_c)\varphi_a\omega_b u^c$

由张量积泛性质可知, 对一般的张量来说这就是:

$T^{ab}{}_c\mapsto T^{ab}{}_c\varphi_a\omega_b u^c$

即

$$T^{(\varphi,\omega)}_{(u)} = T^{ab}{}_c \varphi_a \omega_b u^c$$

这样就得到了一个结论: 张量作为多重线性映射作用于矢量对偶矢量就是先张量积再缩并, 简称"作用即缩并".

另外, 同样以(2,1)型张量为例, 之前提到的多重线性映射观点下有关张量分量的关系式

$T^{\mu\nu}{}_\rho = T^{(e^{*\mu},e^{*\nu})}_{(e_\rho)}$

可以改写为:

$T^{\mu\nu}{}_\rho = T^{ab}{}_c (e^\mu)_a (e^\nu)_b (e_\rho)^c$

顺便一提, 在此基础上, 一般张量的张量积在多重线性映射观点下的表述也很容易得到:

以张量积$M^a{}_b v^c$为例, 其作用在矢量与对偶矢量的结果为:

$\left(M^a{}_b v^c\right) \varphi_a u^b \omega_c = \left(M^a{}_b \varphi_a u^b\right) \left(v^c \omega_c\right)$

也就是说:$(M \otimes v)^{(\varphi,\omega)}_{(u)} = M^{(\varphi)}_{(u)}\, v^{(\omega)}$

即在多重线性函数表述中, 两张量的张量积体现为两多重线性函数的函数值直接相乘,

或者同样不难写出一般(k,l)型张量T和(m,n)型张量S张量积的情况:

$(T \otimes S)^{(\varphi^1,\cdots,\varphi^k,\varphi^{k+1},\cdots,\varphi^{k+m})}_{(v_1,\cdots,v_l,v_{l+1},\cdots,v_{l+n})} \equiv T^{(\varphi^1,\cdots,\varphi^k)}_{(v_1,\cdots,v_l)} S^{(\varphi^{k+1},\cdots,\varphi^{k+m})}_{(v_{l+1},\cdots,v_{l+n})}$

在以多重线性映射定义张量的场合下, 常常都用这种方式定义张量积, 而我们这里其实就是说明了张量积两种定义的等价性.

5.3.2 例2

我们来考虑一下所谓张量的退化(柯里化Currying):

同样考虑张量的多重线性函数观点, 以(2, 3)型张量$T^{(\cdot,\cdot)}_{(\cdot,\cdot,\cdot)}$为例, 不过只输入两个矢量$u, v \in V$，

得到$T^{(\cdot,\cdot)}_{(u,v,\cdot)}$.

容易看出, $T^{(\cdot,\cdot)}_{(u,v,\cdot)} : V^* \times V^* \times V \to P$, 这样原先的(2, 3)型张量就退化为一个(2, 1)型张量.

在抽象指标的写法下, 上式也就是: $T^{ab}{}_{cde} u^c v^d$.

其实刚才这个操作也可以不借助多重线性映射函数观点来表述:

考虑(2, 1)型张量$T \in \mathcal{T}_V(2,1)$

给定一个对偶矢量ω, 按照如下方式规定一个$\mathcal{T}_V(2,1) \to \mathcal{T}_V(1,1)$的线性映射, 使得:

$u \otimes v \otimes \varphi \mapsto u(\omega)\; v \otimes \varphi$

其中$u, v \in V, \varphi \in V^*$

用抽象指标表述的话, 就是:$u^a v^b \varphi_c \mapsto (u^a \omega_a) v^b \varphi_c = (u^a v^b \varphi_c) \omega_a$

对于一般的(2, 1)型张量T, 这个操作就是:

$T^{ab}{}_c \mapsto T^{ab}{}_c \omega_a$

这样确实给出了张量的退化操作.

另外还有如下的例子:

现在考虑(1, 1)型张量$M^a{}_b$, 作用于一个矢量$v \in V$,

得到$M^a{}_b v^b$, 退化为一个矢量, 因此$M \in \mathcal{T}_V(1,1)$也可看作$V \to V$的线性映射.

类似地, M作用在对偶矢量$\varphi \in V^*$, 得到$\varphi_a M^a{}_b$, 退化为一个对偶矢量, 这样$M \in \mathcal{T}_V(1,1)$还可以看作一个$V^* \to V^*$的线性映射.

还有, (2, 0)型张量T^{ab}也可作为$V^* \to V$的线性映射:$v^a = T^{ab} \varphi_b$.

可见, 一个张量可以被视作不同的映射, 这种把同一个张量看作不同映射的观点我们称之为张量面面观.

顺便一提, 前面提到过的那种抽象指标和具体指标混合的表达式

$T^{\mu b}{}_c = \sum_{\nu,\rho} T^{\mu\nu}{}_\rho \, (e_\nu)^b (e^\rho)_c$

其实也就是对一个张量输入一些基矢和对偶基矢进行退化的结果:

$T^{\mu b}{}_c = T^{ab}{}_c (e^\mu)_a$

在这之后往下承接正传上篇中的2.3小节开始往后的部分, 将会介绍爱因斯坦求和等内容.

6 更普遍的张量

在这部分, 我们要把1.2介绍的抽象指标以及缩并这套东西推广到更一般的不同线性空间的张量积空间的情形.

首先来看不涉及缩并的抽象指标. 之前讲到的抽象指标可以直接沿用过来, 不过为了便于区分, 我们可以对不同种类的空间使用不同类型的抽象指标,

例如对空间V, V^*使用小写字母$a, b, \cdots$ 对空间U, U^*使用大写字母$A, B, \cdots$:

$v^a, \cdots \in V^a$; $\varphi_b, \cdots \in V_b$

$u^A, \cdots \in U^A$; $\omega_B, \cdots \in U_B$

要是还有更多空间的话怎么办? 那就

$a, a', a'', \hat{a}, \tilde{a}, \bar{a}, \cdots$

这种情况下的基矢展开也不难写出:

比如空间 $U \otimes V \otimes V^*$的基矢为$s_\Sigma \otimes e_\mu \otimes e^{*\nu}$,

其中s_Σ是U中的第Σ个基矢, 而$e_\mu, e^{*\nu}$是V和V^*中的基矢;

这里面一个张量$T^{Aa}{}_b$的基矢展开就是$T^{Aa}{}_b = T^{\Sigma\mu}{}_\nu \, (s_\Sigma)^A (e_\mu)^a (e^\nu)_b$,

其中$T^{\Sigma\mu}{}_\nu$是$T^{Aa}{}_b$的分量, 而A, a, b都是抽象指标.

再来说缩并. 当参与张量积的一系列空间包含了某个线性空间V及其对偶空间V^*时, 相应的张量积空间上可以定义缩并运算.

6.1 定义：更一般的缩并运算:

考虑一个形如$V \otimes V^* \otimes W \otimes \cdots$的张量积空间, 在这上面可以定义一个缩并运算:

$C : V \otimes V^* \otimes W \otimes \cdots \to W \otimes \cdots$

$v \otimes \varphi \otimes w \otimes \cdots \mapsto \varphi(v) \, w \otimes \cdots$

这里把被缩并的一对空间写在最前面只是为了书写方便, 实际上并不是必要的.

缩并运算在抽象指标下的表述也可以直接把前面的规则沿用过来:

比如说考虑$U^A \otimes V^a \otimes V_b$中的一个张量$T^{Aa}{}_b$, 可以针对$V^a$和$V_b$进行缩并, 也就是对后面两个指标缩并:

$T^{Aa}{}_b \mapsto u^A = T^{Aa}{}_a$

其分量也就是$T^{\Sigma\mu}{}_\mu$，也就是对后两个指标进行求和.

这里不难注意到, 跟之前一个线性空间V上的(k, l)型张量相比, 现在的缩并规则有所增加, 就是**只有代表同种空间(如V与V^*)的一对上下指标才可以缩并.**

比如 $T^{Aa}{}_b \in U^A \otimes V^a \otimes V_b$, 可以缩并后两个指标得到$T^{Aa}{}_a$ 但是第1个指标不能跟最右边的下标缩并,

这也可以看出用不同种指标来区分不同种空间的好处, 因为此时缩并规则体现为: 只有同种字母符号的上下指标可以缩并.

7 矢量为什么是（1，0）型张量

矢量被称为（1，0）型张量，是因为在张量的分类中，矢量作为一阶张量，具有一个方向和一个大小。在张量理论中，张量的类型由两个数字来标识，这两个数字分别代表协变和逆变张量的秩。对于矢量来说，它是一个一阶张量，可以是协变矢量（记作（1，0）型）或逆变矢量（记作（0，1）型）。

具体来说，协变矢量（1，0）型张量意味着它有一个逆变指标，没有协变指标。在坐标变换下，协变矢量的分量会按照逆变法则进行变换，这与点的坐标变换规律相同。因此，矢量在张量表示中被称为（1，0）型张量，这反映了它的逆变性质和一阶的特性。

7.1 具体举例逆变法则进行变换

逆变法则进行变换是指在坐标系变换下，矢量的分量按照与坐标系变换相反的方式进行变换。具体来说，如果坐标系从 x^i 变换到 x'^i，那么矢量 V^i 的分量将按照以下方式变换：

$$V'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} V^j$$

这里，$\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}$ 是坐标变换的雅可比矩阵的元素，表示新坐标 x'^i 对旧坐标 x^j 的偏导数。

举个具体的例子，假设我们有一个二维空间中的矢量 V，在旧坐标系 x, y 中的分量为 V^x 和 V^y。现在我们变换到一个新的坐标系 x', y'，其中 $x' = x + y$ 和 $y' = x - y$。

首先，我们需要计算雅可比矩阵：

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial x'}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial y'}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y'}{\partial y} = -1$$

所以雅可比矩阵为：

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

然后，我们使用逆变法则来变换矢量的分量：

$$V'^x = \frac{\partial x'}{\partial x} V^x + \frac{\partial x'}{\partial y} V^y = V^x + V^y$$

$$V'^y = \frac{\partial y'}{\partial x} V^x + \frac{\partial y'}{\partial y} V^y = V^x - V^y$$

因此，在新坐标系 x', y' 中，矢量 V 的分量为 $V'^x = V^x + V^y$ 和 $V'^y = V^x - V^y$。

这个例子展示了矢量分量在坐标系变换下的逆变性质，即矢量的分量按照与坐标系变换相反的方式进行变换。

7.2 对比协变换法则举例

协变换法则与逆变换法则相反，它描述了在坐标系变换下，协变矢量（或称余矢量）的分量如何变换。协变矢量的分量按照与坐标系变换相同的方式进行变换。具体来说，如果坐标系从 x^i 变换到 x'^i，那么协变矢量 V_i 的分量将按照以下方式变换：

$$V_i' = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} V_j$$

这里，$\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}$ 是坐标变换的雅可比矩阵的逆矩阵的元素，表示旧坐标 x^j 对新坐标 x'^i 的偏导数。

继续使用之前的例子，我们有一个二维空间中的协变矢量 V，在旧坐标系 x, y 中的分量为 V_x 和 V_y。现在我们变换到一个新的坐标系 x', y'，其中 $x' = x + y$ 和 $y' = x - y$。

首先，我们需要计算雅可比矩阵的逆矩阵。之前的雅可比矩阵为：

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

雅可比矩阵的逆矩阵为：

$$J^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

所以，我们有：

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial x}{\partial y'} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial x'} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial y'} = -\frac{1}{2}$$

然后，我们使用协变换法则来变换协变矢量的分量：

$$V'_{x'} = \frac{\partial x}{\partial x'} V_x + \frac{\partial y}{\partial x'} V_y = \frac{1}{2} V_x + \frac{1}{2} V_y$$

$$V'_{y'} = \frac{\partial x}{\partial y'} V_x + \frac{\partial y}{\partial y'} V_y = \frac{1}{2} V_x - \frac{1}{2} V_y$$

因此，在新坐标系 x', y' 中，协变矢量 V 的分量为 $V'_{x'} = \frac{1}{2} V_x + \frac{1}{2} V_y$ 和 $V'_{y'} = \frac{1}{2} V_x - \frac{1}{2} V_y$。

这个例子展示了协变矢量分量在坐标系变换下的协变换性质，即协变矢量的分量按照与坐标系变换相同的方式进行变换。

8 线性变换为什么是（1，1）型张量

线性变换是（1，1）型张量，是因为它同时具有一个逆变指标和一个协变指标。在张量理论中，一个（1，1）型张量可以表示为一个矩阵，它能够将一个矢量（一阶逆变张量）映射到另一个矢量。

具体来说，一个线性变换 T 可以表示为一个矩阵 T^i_j，其中上标 i 表示逆变指标，下标 j 表示协变指标。这个矩阵可以作用于一个矢量 V^j，得到另一个矢量 W^i，即：

$$W^i = T^i_j V^j$$

这里，T^i_j 的上标 i 表示结果矢量的分量，下标 j 表示输入矢量的分量。这种表示方式反映了线性变换的逆变和协变性质，因此线性变换是一个（1，1）型张量。

在坐标系变换下，线性变换的矩阵 T^i_j 会按照以下方式变换：

$$T'^i_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} T^k_l \frac{\partial x^l}{\partial x'_j}$$

这里，$\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}$ 和 $\frac{\partial x^l}{\partial x'_j}$ 分别是坐标变换的雅可比矩阵及其逆矩阵的元素。这种变换方式保持了线性变换的矩阵形式，同时也反映了（1，1）型张量的性质。

因此，线性变换是（1，1）型张量，这反映了它同时具有逆变和协变的性质，以及它在坐标系变换下的变换规律。

8.1 举例演示

让我们通过一个具体的例子来演示线性变换作为（1，1）型张量的变换。

和W中的矢量相反, 我们人为规定对偶矢量分量的编号用下指标表示, 对偶基矢的编号用**上指标**表示.

假设我们有一个二维空间中的线性变换，它将一个二维矢量 $V = (V^1, V^2)$ 映射到另一个二维矢量 $W = (W^1, W^2)$。这个线性变换可以由一个 2x2 矩阵 T 表示：

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

其中，$a, b, c,$ 和 d 是变换矩阵的元素。这个矩阵 T 就是一个（1，1）型张量，因为它有一个逆变指标和一个协变指标。

现在，我们要将矢量 V 通过这个线性变换 T 映射到 W：

$$W^1 = aV^1 + bV^2$$

$$W^2 = cV^1 + dV^2$$

这可以写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} W^1 \\ W^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \end{pmatrix}$$

现在，假设我们要将坐标系从 (x, y) 变换到 (x', y')，其中 $x' = x + y$ 和 $y' = x - y$。我们需要计算新坐标系下的线性变换矩阵 T'。

首先，我们计算雅可比矩阵 J 和它的逆 J^{-1}：

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

然后，我们使用张量的变换法则来计算 T'：

$$T' = J^{-1}TJ$$

将 J, J^{-1}, 和 T 代入上面的公式：

$$T' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

我们先计算中间的矩阵乘积：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ c+d & c-d \end{pmatrix}$$

然后计算最终的 T'：

$$T' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ c+d & c-d \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (a+b)+(c+d) & (a-b)-(c-d) \\ (a+b)-(c+d) & (a-b)+(c-d) \end{pmatrix}$$

$$T' = \begin{pmatrix} \frac{a+b+c+d}{2} & \frac{a-b-c+d}{2} \\ \frac{a+b-c-d}{2} & \frac{a-b+c-d}{2} \end{pmatrix}$$

这就是新坐标系下的线性变换矩阵 T'，它仍然是一个（1，1）型张量，因为它有一个逆变指标和一个协变指标，并且它通过矩阵乘法的方式变换了矢量 V。

9 雅克比矩阵为什么使用偏导数

雅可比矩阵使用偏导数是因为它描述了多变量函数在某一点的局部线性近似。具体来说，雅可比矩阵的元素是函数的偏导数，这些偏导数表示函数在每个变量方向上的变化率。

假设我们有一个从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的多变量函数 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，可以表示为：

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

雅可比矩阵 J 是一个 $m \times n$ 的矩阵，其元素为：

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

这里，$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ 表示函数 f_i 对变量 x_j 的偏导数，即 f_i 在 x_j 方向上的变化率。

雅可比矩阵的几何意义是，它描述了函数 f 在某一点的局部线性变换。当我们将 f 在某一点 x 附近进行线性近似时，雅可比矩阵 J 就是这个线性变换的矩阵表示。这个线性变换可以将 $\mathbb{R}^n$ 中的微小向量 Δx 映射到 $\mathbb{R}^m$ 中的微小向量 Δf，即：

$\Delta f \approx J\Delta x$

因此，雅可比矩阵使用偏导数来描述函数在每个变量方向上的变化率，从而提供了函数在某一点的局部线性近似。

在坐标变换中，雅可比矩阵的元素是新坐标对旧坐标的偏导数，这反映了新坐标系和旧坐标系之间的局部线性关系。这种关系在张量的变换法则中非常重要，因为它确保了张量在不同坐标系下的表示是一致的。

10 张量的变换法则都是矩阵乘法的从右到左吗？比如（k，l）型就是先l个矩阵相乘再k个对偶矩阵相乘？

张量的变换法则确实涉及矩阵乘法，但具体操作取决于张量的类型（即它的协变和逆变指标）。对于一个（k，l）型张量，它的变换涉及到k个逆变指标和l个协变指标。在坐标变换下，每个逆变指标和协变指标都需要按照相应的法则进行变换。

具体来说，对于一个（k，l）型张量 $T^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_l}$，在坐标变换 $x^i \to x'^i$ 下，它的变换法则为：

$$T'^{i'_1 i'_2 \ldots i'_k}_{j'_1 j'_2 \ldots j'_l} = \frac{\partial x'^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial x'^{i'_2}}{\partial x^{i_2}} \cdots \frac{\partial x'^{i'_k}}{\partial x^{i_k}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^{j'_1}} \frac{\partial x^{j_2}}{\partial x'^{j'_2}} \cdots \frac{\partial x^{j_l}}{\partial x'^{j'_l}} T^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_l}$$

这里，每个 $\frac{\partial x'^{i'}}{\partial x^i}$ 是雅可比矩阵的元素，每个 $\frac{\partial x^j}{\partial x'^{j'}}$ 是雅可比矩阵的逆矩阵的元素。这些元素按照指标的顺序相乘，最后乘以原张量 $T^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_l}$。

从这个公式可以看出，对于（k，l）型张量，我们首先对l个协变指标进行变换（即与雅可比矩阵的逆矩阵相乘），然后对k个逆变指标进行变换（即与雅可比矩阵相乘）。这个顺序与矩阵乘法的从右到左是一致的。

因此，张量的变换法则确实涉及到矩阵乘法的从右到左的顺序，但具体操作取决于张量的协变和逆变指标。对于（k，l）型张量，我们先对l个协变指标进行变换，再对k个逆变指标进行变换。

10.1 举例说明

好的，让我们通过一个具体的例子来说明（k，l）型张量的变换法则。

假设我们有一个（2，1）型张量 T^{ij}_k，在二维空间中，这意味着我们有两个逆变指标 i 和 j，以及一个协变指标 k。假设我们有一个坐标变换 x 和 y 到 x' 和 y'，其中 $x' = x + y$ 和 $y' = x - y$。

首先，我们需要计算雅可比矩阵 J 和它的逆 J^{-1}：

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

现在，假设我们有一个（2，1）型张量 T^{ij}_k 在原始坐标系中的分量为：

$$T_1^{11} = a, \quad T_1^{12} = b, \quad T_1^{21} = c, \quad T_1^{22} = d$$

我们需要计算这个张量在新坐标系 x' 和 y' 中的分量 $T_k'^{ij}$。根据（2，1）型张量的变换法则：

$$T_1'^{i'j'} = J_i^{i'} J_j^{j'} T_1^{ij} \cdot (J^{-1})_k^1$$

由于我们的张量只有一个协变指标，所以 $(J^{-1})_k^1$ 只涉及一个元素，即 $\frac{\partial x}{\partial x'}$ 或 $\frac{\partial y}{\partial x'}$。因此，我们可以计算新坐标系中的张量分量：

$$T_1'^{11} = J_1^{1'} J_1^{1'} T_1^{11} + J_2^{1'} J_1^{1'} T_1^{21} + J_1^{1'} J_2^{1'} T_1^{12} + J_2^{1'} J_2^{1'} T_1^{22}$$

$$T_1'^{12} = J_1^{1'} J_1^{2'} T_1^{11} + J_2^{1'} J_1^{2'} T_1^{21} + J_1^{1'} J_2^{2'} T_1^{12} + J_2^{1'} J_2^{2'} T_1^{22}$$

将雅可比矩阵的元素代入上述公式：

$$T_1'^{11} = (1 \cdot 1)a + (1 \cdot 1)c + (1 \cdot 1)b + (1 \cdot 1)d = a + c + b + d$$

$$T_1'^{12} = (1 \cdot -1)a + (1 \cdot 1)c + (1 \cdot -1)b + (1 \cdot 1)d = -a + c - b + d$$

因此，新坐标系中的张量分量为 $T_1'^{11} = a + c + b + d$ 和 $T_1'^{12} = -a + c - b + d$。

这个例子展示了如何使用雅可比矩阵和它的逆矩阵来变换一个（2，1）型张量的分量。注意，这里的计算简化了，因为我们的张量只有一个协变指标。对于更高阶的张量，变换法则会涉及更多的矩阵乘法。

11 线性代数中什么是同构

让我们来探讨一下线性代数中的“同构”这一概念。首先，我们需要明确“同构”在数学中的基本含义。同构，顾名思义，是指两个结构在某种意义上是相同的，即它们之间存在一个双射的映射，能够保持这些结构的性质。

在线性代数中，我们通常讨论的是向量空间。因此，当我们说两个向量空间是同构的，意味着它们之间存在一个双射的线性映射。这个映射不仅是一一对应，而且能够保持向量空间的结构，即保持向量的加法和标量乘法。

具体来说，设 V 和 W 是两个向量空间，如果存在一个线性映射 $T: V \to W$，使得 T 是双射的，即 T 既是单射（一对一）又是满射（映上），那么我们称 V 和 W 是同构的。这个映射 T 就称为同构映射。

为了进一步理解，我们可以考虑两个具体的向量空间。例如，考虑 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^n$ 本身。显然，它们之间存在一个恒等映射，这个映射是线性的、双射的，因此 $\mathbb{R}^n$ 与自身是同构的。

再考虑一个例子，设 V 是所有 n 次多项式组成的向量空间，而 W 是 $\mathbb{R}^{n+1}$。我们知道，多项式可以通过其系数与 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的向量一一对应。因此，存在一个线性映射，将每个多项式映射到其系数向量，这个映射是双射的，从而 V 与 W 是同构的。

通过这些例子，我们可以看到，同构不仅保持了向量空间的结构，还使得我们可以在不同的向量空间之间进行转换，而不会丢失任何信息。这种转换在数学和物理学中有着广泛的应用，例如在坐标变换、基变换等场景中。

综上所述，线性代数中的同构是指两个向量空间之间存在一个双射的线性映射，这个映射保持了向量空间的结构，使得两个向量空间在数学上是等价的。

在数学中，同构是指两个向量空间之间存在一个双射的线性映射，该映射保持向量空间的结构，使得两个向量空间在

12 指标何时在上何时在下

在张量分析中，指标的位置（上标或下标）用于区分张量的类型，即协变张量和逆变张量。具体来说：

1. **逆变张量**：逆变张量的指标在上，表示为T^i。逆变张量的分量在坐标变换时，其变化方式与坐标的变化方式相反。例如，如果坐标从x^i变换到x'^i，那么逆变张量的分量将从T^i变换到T'^i，其中$T'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} T^j$。

2. **协变张量**：协变张量的指标在下，表示为T_i。协变张量的分量在坐标变换时，其变化方式与坐标的变化方式相同。例如，如果坐标从x^i变换到x'^i，那么协变张量的分量将从T_i变换到T'_i，其中$T'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} T_j$。

3. **混合张量**：混合张量既有上标也有下标，表示为T^i_j。混合张量的分量在坐标变换时，其变化方式是逆变部分和协变部分的组合。例如，如果坐标从x^i变换到x'^i，那么混合张量的分量将从T^i_j变换到T'^i_j，其中$T'^i_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} T^k_l$。

总结来说，指标在上表示逆变张量，指标在下表示协变张量，而混合张量则同时具有上标和下标。这些规则是张量分析中的基本约定，对于理解和应用张量理论至关重要。

12.1 举例说明

当然，让我们通过一些具体的例子来说明张量指标的位置如何区分协变和逆变分量。

1. 逆变张量的例子：向量

在三维空间中，一个向量可以表示为位置向量 $\mathbf{A}$，其分量可以写作 A^i（其中 $i = 1, 2, 3$），这里的上标 i 表示这是一个逆变张量。例如：

$$\mathbf{A} = A^1\mathbf{e}_1 + A^2\mathbf{e}_2 + A^3\mathbf{e}_3$$

这里，$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 是基向量，A^i 是向量 $\mathbf{A}$ 在这些基向量上的分量。

2. 协变张量的例子：对偶向量（一形式）

对偶向量（或称为一形式）是向量的对偶，它可以“吃掉”一个向量并返回一个标量。在相同的三维空间中，一个对偶向量 ω 可以表示为：

$$\omega = \omega_1\mathbf{e}^1 + \omega_2\mathbf{e}^2 + \omega_3\mathbf{e}^3$$

这里，$\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$ 是对偶基向量，ω_i 是对偶向量 ω 在这些对偶基向量上的分量，下标 i 表示这是一个协变张量。

3. 混合张量的例子：二阶张量

一个二阶张量可以既有逆变分量也有协变分量。例如，一个线性变换可以由一个矩阵表示，这个矩阵可以看作是一个二阶张量 T：

$$T = T^i_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j$$

这里，T^i_j 是二阶张量 T 的分量，$\mathbf{e}_i$ 是基向量，$\mathbf{e}^j$ 是对偶基向量。指标 i 和 j 分别是上标和下标，表示这是一个混合张量。

坐标变换的例子

假设我们有一个坐标变换 $x^i \to x'^i$，那么逆变张量和协变张量的分量将按照以下规则变换：

- 逆变张量分量：$A'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j$
- 协变张量分量：$\omega'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \omega_j$

这些例子展示了如何通过指标的位置来区分张量的类型，并且说明了它们在坐标变换下如何变化。

13 逆变分量对应的是协变基底

在张量分析中，逆变分量和协变分量是相对于基底而言的。具体来说：

- 逆变分量是相对于协变基底的分量。当我们在一个坐标系中表示一个向量时，如果向量的分量随着坐标系的变换而按照基变换矩阵的逆进行变换，那么这些分量就被称为逆变分量。逆变分量通常用上标表示，例如 V^α。

- 协变分量是相对于逆变基底的分量。当我们在一个坐标系中表示一个向量时，如果向量的分量随着坐标系的变换而按照基变换矩阵进行变换，那么这些分量就被称为协变分量。协变分量通常用下标表示，例如 V_α。

因此，逆变分量 V^α 是相对于协变基底 g_α 的分量，而协变分量 V_α 是相对于逆变基底 g^α 的分量。它们之间的关系可以通过度量张量进行转换，即 $V_\alpha = V^\beta g_{\beta\alpha}$ 和 $V^\alpha = V_\beta g^{\beta\alpha}$。

逆变分量对应的是逆变指标。

用逆变分量乘以协变基底会得到一个向量。具体来说，如果 V^α 是一个向量的逆变分量，而 g_α 是对应的协变基底，那么向量 V 可以表示为：

$$V = V^\alpha g_\alpha$$

这里，V^α 是向量 V 在协变基底 g_α 下的分量。这个表达式表示了向量 V 在给定基底下的线性组合。在张量分析中，这种操作是将向量的分量与其基底相结合，以得到向量本身。

总结来说，用逆变分量乘以协变基底会得到一个向量，这个向量是逆变分量在协变基底下的线性组合。

当我们说用逆变分量乘以协变基底得到“向量本身”时，我们是在特定的上下文中讨论这个问题，即在给定的坐标系或基底下，我们通过逆变分量和协变基底的乘积来表示向量的具体形式。

在张量分析和微分几何中，向量可以被视为一个抽象的几何对象，它不依赖于特定的坐标系。然而，当我们需要在某个特定的坐标系中工作时，我们需要用坐标来表示这个向量。这时，我们使用逆

变分量（上标）来表示向量在某个基底下的分量，而协变基底（通常是偏导数算子）提供了这些分量的“方向”。

这里的“向量本身”指的是在特定基底下向量的表示，而不是向量作为一个抽象对象的全部信息。向量的全部信息是与坐标系无关的，但是当我们需要进行计算或者测量时，我们总是需要将向量投影到某个具体的坐标系中，这时我们使用的就是它的逆变分量。

例如，在三维空间中，一个向量可以被表示为：

$$\mathbf{V} = V^1\mathbf{e}_1 + V^2\mathbf{e}_2 + V^3\mathbf{e}_3$$

其中，V^1, V^2, V^3 是向量 $\mathbf{V}$ 在正交归一基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 下的逆变分量。这个表达式给出了向量在特定基底下的具体形式，即“向量本身”在这个基底下的表示。

因此，当我们说用逆变分量乘以协变基底得到向量本身时，我们是指在特定坐标系或基底下向量的表示，而不是指向量作为一个不依赖于坐标系的抽象几何对象的全部信息。

13.1 举例来说

给定逆变分量 $V^1 = 1$ 和 $V^2 = 1$，以及协变基底 $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ 和 $\mathbf{e}_2 = (1, 1)$，我们可以表示向量 $\mathbf{V}$ 为：

$$\mathbf{V} = V^1\mathbf{e}_1 + V^2\mathbf{e}_2$$

将给定的值代入，我们得到：

$$\mathbf{V} = 1 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (1, 1)$$

$$\mathbf{V} = (1, 0) + (1, 1)$$

$$\mathbf{V} = (1 + 1, 0 + 1)$$

$$\mathbf{V} = (2, 1)$$

因此，向量 $\mathbf{V}$ 在这个坐标系中的表示是 $(2, 1)$。这就是我们通过逆变分量和协变基底得到的向量本身的具体形式。

向量的对偶形式是指在对偶空间中的表示，对偶空间是由原向量空间的线性泛函组成的。在有限维空间中，每个向量都有一个唯一的对偶向量，它是一个线性泛函，可以作用于原向量空间中的向量。

给定的向量 $\mathbf{V} = (2, 1)$ 在原空间中，其对偶形式 $\mathbf{V}^*$ 是一个线性泛函，它作用于原空间中的向量 $\mathbf{W} = (w_1, w_2)$ 时，可以表示为：

$$\mathbf{V}^*(\mathbf{W}) = 2w_1 + 1w_2$$

这个线性泛函 $\mathbf{V}^*$ 就是向量 $\mathbf{V}$ 的对偶形式。在对偶空间中，对偶向量 $\mathbf{V}^*$ 可以表示为：

$$\mathbf{V}^* = 2\mathbf{e}^1 + 1\mathbf{e}^2$$

其中，$\mathbf{e}^1$ 和 $\mathbf{e}^2$ 是对偶基底，它们满足：

$$\mathbf{e}^1(\mathbf{e}_1) = 1, \quad \mathbf{e}^1(\mathbf{e}_2) = 0$$

$$\mathbf{e}^2(\mathbf{e}_1) = 0, \quad \mathbf{e}^2(\mathbf{e}_2) = 1$$

因此，向量 $\mathbf{V}$ 的对偶形式 $\mathbf{V}^*$ 在对偶空间中的表示是 $2\mathbf{e}^1 + 1\mathbf{e}^2$。

要找到向量 $\mathbf{V}$ 的协变分量 V_1 和 V_2，以及对偶基底 $\mathbf{e}^1$ 和 $\mathbf{e}^2$，我们需要使用度量张量和其逆。度量张量 g_{ij} 由基底向量的内积给出，即 $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$。

给定的基底向量为 $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ 和 $\mathbf{e}_2 = (1, 1)$，我们可以计算度量张量的分量：

$$g_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = (1, 0) \cdot (1, 0) = 1$$

$$g_{12} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = (1, 0) \cdot (1, 1) = 1$$

$$g_{21} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = (1, 1) \cdot (1, 0) = 1$$

$$g_{22} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = (1, 1) \cdot (1, 1) = 2$$

所以，度量张量 g_{ij} 为：

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

协变分量 V_i 可以通过逆变分量 V^i 和度量张量 g_{ij} 的乘积得到：

$$V_i = V^j g_{ji}$$

给定的逆变分量为 $V^1 = 1$ 和 $V^2 = 1$，我们可以计算协变分量：

$$V_1 = V^1 g_{11} + V^2 g_{21} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$$

$$V_2 = V^1 g_{12} + V^2 g_{22} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3$$

所以，协变分量 V_1 和 V_2 分别为 2 和 3。

接下来，我们需要找到对偶基底 $\mathbf{e}^1$ 和 $\mathbf{e}^2$。对偶基底满足 $\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j$，其中 δ^i_j 是Kronecker delta。对偶基底可以通过度量张量的逆 g^{ij} 来计算。首先，我们需要找到 g_{ij} 的逆：

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

对偶基底 $\mathbf{e}^i$ 可以表示为：

$$\mathbf{e}^i = g^{ij} \mathbf{e}_j$$

所以，我们有：

$$\mathbf{e}^1 = g^{11}\mathbf{e}_1 + g^{12}\mathbf{e}_2 = 2 \cdot (1,0) + (-1) \cdot (1,1) = (2,0) - (1,1) = (1,-1)$$

$$\mathbf{e}^2 = g^{21}\mathbf{e}_1 + g^{22}\mathbf{e}_2 = (-1) \cdot (1,0) + 1 \cdot (1,1) = (-1,0) + (1,1) = (0,1)$$

因此，对偶基底 $\mathbf{e}^1$ 和 $\mathbf{e}^2$ 分别为 $(1,-1)$ 和 $(0,1)$。

综上所述，协变分量 V_1 和 V_2 分别为 2 和 3，对偶基底 $\mathbf{e}^1$ 和 $\mathbf{e}^2$ 分别为 $(1,-1)$ 和 $(0,1)$。

在上例中，我们有以下概念：

1. **逆变指标**：上标 α 在 V^α 中表示逆变指标。在给定的例子中，逆变指标是 1 和 2，对应于 V^1 和 V^2。

2. **协变指标**：下标 α 在 V_α 中表示协变指标。在给定的例子中，协变指标也是 1 和 2，对应于 V_1 和 V_2。

3. **逆变分量**：向量 $\mathbf{V}$ 的逆变分量是 $V^1 = 1$ 和 $V^2 = 1$。

4. **协变分量**：向量 $\mathbf{V}$ 的协变分量是 $V_1 = 2$ 和 $V_2 = 3$。

5. **协变基底**：给定的协变基底是 $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ 和 $\mathbf{e}_2 = (1,1)$。

6. **逆变基底**：对偶基底 $\mathbf{e}^1 = (1,-1)$ 和 $\mathbf{e}^2 = (0,1)$ 是逆变基底。

总结如下：

- 逆变指标：1, 2
- 协变指标：1, 2
- 逆变分量：$V^1 = 1$, $V^2 = 1$
- 协变分量：$V_1 = 2$, $V_2 = 3$
- 协变基底：$\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (1,1)$
- 逆变基底：$\mathbf{e}^1 = (1,-1)$, $\mathbf{e}^2 = (0,1)$

在基底(1，0)(0，1)下坐标为(2，1)的向量在逆变基底(2，0)(-2，2)的坐标是多少？

为了找到向量在新基底下的坐标，我们需要进行基底变换。给定的向量在标准基底 $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 下的坐标是 $(2,1)$。新基底是 $(2,0)$ 和 $(-2,2)$。

首先，我们设向量在新基底下的坐标为 (x', y')。那么，向量可以表示为：

$$(2,1) = x' \cdot (2,0) + y' \cdot (-2,2)$$

这可以写成线性方程组：

$$\begin{cases} 2x' - 2y' = 2 \\ 0x' + 2y' = 1 \end{cases}$$

我们先解第二个方程：

$$2y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{2}$$

然后将 $y' = \frac{1}{2}$ 代入第一个方程：

$$2x' - 2 \cdot \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow 2x' - 1 = 2 \Rightarrow 2x' = 3 \Rightarrow x' = \frac{3}{2}$$

因此，向量在新基底下的坐标是 $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$。

最终答案是：

$$\boxed{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)}$$

14 张量的本质是坐标系下的转换矩阵。张量的型与输入的协变和逆变参数个数有关。请完善这两句话。详细解释原理。

14.1 完善后的表述

1. **张量的本质是坐标系下的转换矩阵**：张量是描述几何或物理量在不同坐标系下变换规则的数学对象。它不仅包含数值信息，还定义了这些数值在不同坐标系中的转换方式。张量的分量在坐标变换时遵循特定的变换规则，确保其表示的物理量在不同坐标系中保持一致。

2. **张量的型与输入的协变和逆变参数个数有关**：张量的型（或阶）由其协变和逆变指标的个数决定。一个 (p, q) 型张量有 p 个协变指标和 q 个逆变指标，表示它在坐标变换时需要 p 个协变基向量和 q 个逆变基向量的组合来描述。

—

14.2 详细解释

14.2.1 1. 张量的本质是坐标系下的转换矩阵

张量是广义的“多维数组”，但其核心在于它描述了物理或几何量在不同坐标系中的变换规则。例如： - **标量**：零阶张量，在坐标变换下保持不变。 - **向量**：一阶张量，分为协变向量和逆变向量。 - 协变向量：分量随坐标系的基向量变化而变化。 - 逆变向量：分量随坐标系的基向量逆变换而变化。 - **高阶张量**：如二阶张量（矩阵），可以表示应力、应变等物理量。

坐标变换规则： - 协变张量的分量变换规则与基向量相同。 - 逆变张量的分量变换规则与基向量的逆变换相同。

例如，在二维坐标系中，一个向量 V 的分量在坐标变换 $x' = Ax$ 下，协变分量 V_i 和逆变分量 V^i 分别满足：

$$V'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} V_j \quad \text{(协变变换)}$$

$$V'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} V^j \quad \text{(逆变变换)}$$

14.2.2 2. 张量的型与协变和逆变参数个数有关

张量的型 (p, q) 表示它有 p 个协变指标和 q 个逆变指标。例如： - $(0, 0)$ 型张量：标量。 - $(1, 0)$ 型张量：协变向量。 - $(0, 1)$ 型张量：逆变向量。 - $(1, 1)$ 型张量：线性变换矩阵。

张量的运算： - **缩并**：将一个协变指标和一个逆变指标求和，降低张量的阶数。 - **外积**：将两个张量结合，增加张量的阶数。

示例： - 应力张量 σ^{ij} 是一个 $(2, 0)$ 型张量，表示力在方向上的分布。 - 度量张量 g_{ij} 是一个 $(0, 2)$ 型张量，用于定义空间中的距离和角度。

—

14.3 总结

张量的本质在于其在不同坐标系中的变换规则，而其型 (p,q) 则描述了它的协变和逆变指标的个数。理解张量的协变和逆变性质是掌握其物理意义和数学表达的关键。