线性代数矩阵操作函数

小圆滚滚

1 基坐标旋转

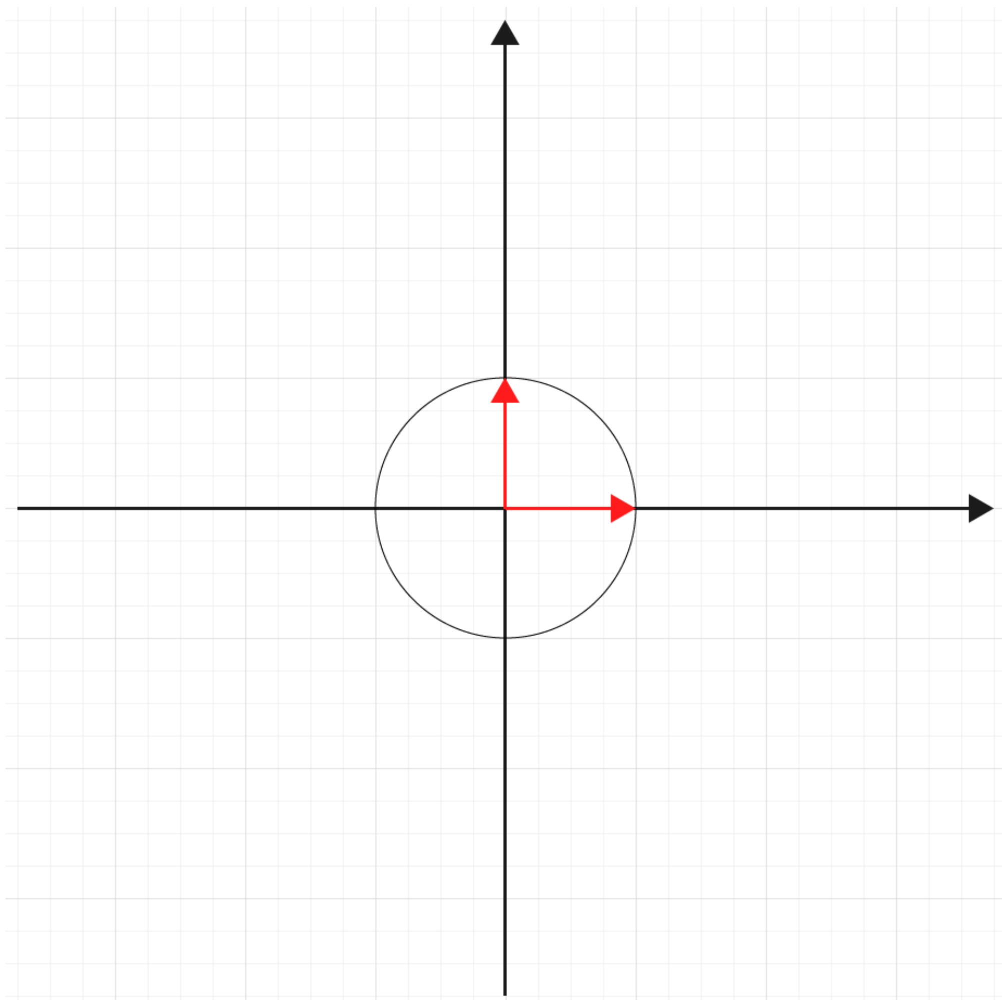

图 1: view1

在图1视角中，基可以由两个向量$\hat{i}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$,$\hat{j}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$表示。这里称为我们的视角。

在图1视角的基础上将基旋转成另一个线性空间V_2的基，在我们的视角，看V_2的基，就有我们的坐标：$\hat{i}=\begin{bmatrix}cos\varphi\\sin\varphi\end{bmatrix}$,$\hat{j}=\begin{bmatrix}-sin\varphi\\cos\varphi\end{bmatrix}$

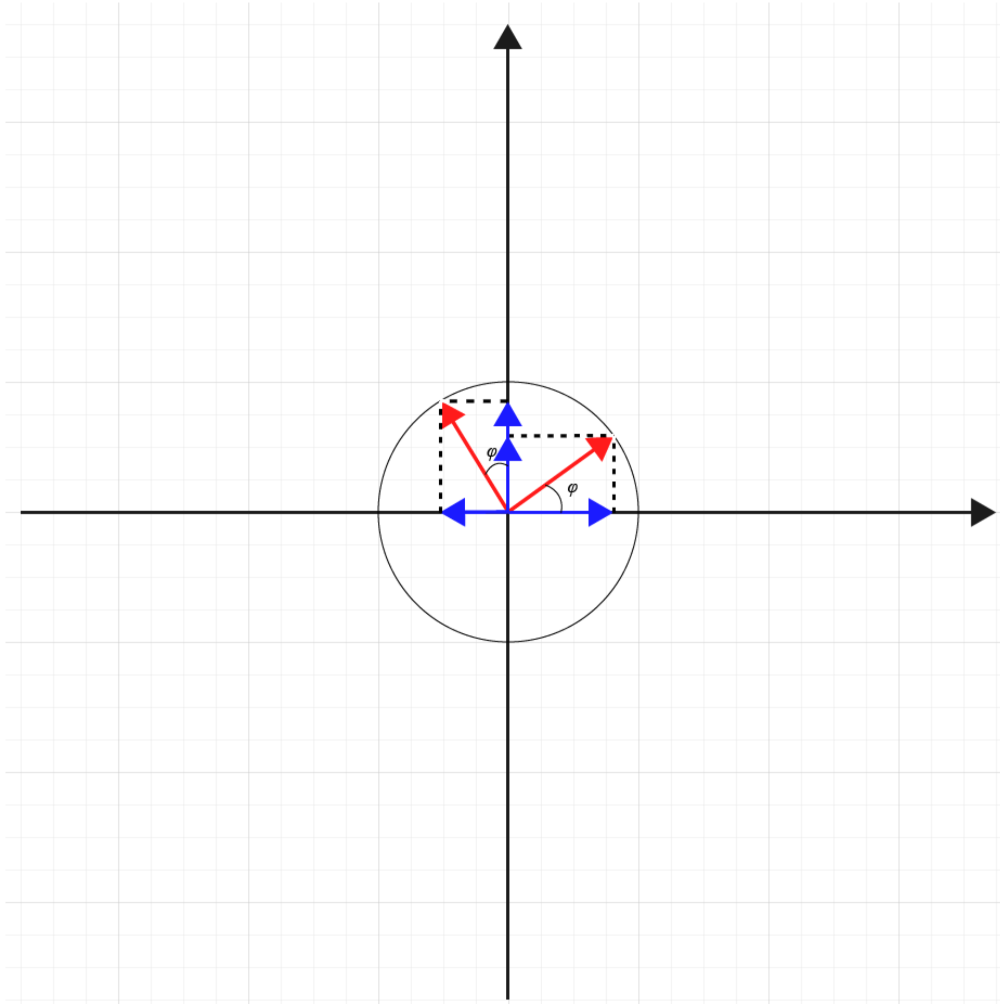

图 2: view2

在V_2的基里面如果有一个坐标$\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$，那么这个坐标被我们读数就将是一番计算：$\overrightarrow{v}=-1\widehat{i}+2\widehat{j}$

$$\overrightarrow{v}=-1\begin{bmatrix}cos\varphi\\sin\varphi\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-sin\varphi\\cos\varphi\end{bmatrix}$$

矩阵的定义为：

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\\cdots\\y_n=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{cases}$$

$\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{12}\end{bmatrix}$是每一行的系数，代表着一个线性无关的基的构成向量。比如二维空间，就由$\hat{i},\hat{j}$构成。

矩阵加法定义如下：

$$\begin{bmatrix}-1\cdot cos\varphi+2(-sin\varphi)\\-1\cdot sin\varphi+2(cos\varphi)\end{bmatrix}$$

可以看出，列向量的每一项，都是由系数（新基下的坐标），乘以$\hat{i},\hat{j}$构成。相当于在他人给出的坐

标，转换到我们视角下的坐标。需要他人给出的他们的分量顺序下分别的投影长度，转换到我们视角下分量顺序下分别的投影长度。

将这些分量顺序下的投影相加，就可以得到最终他们描述的量呈现在我们坐标系下的分量，按顺序列出，得到一个向量的坐标。

经过上面的推导，我们可以将结论转换为技巧，就是，如果别人在他的视角下给出了一个向量（也就是坐标，也就是一个数组），那么我们在我们的地图上标出，首先要将对方的$\hat{i},\hat{j}$排一个矩阵，这个矩阵由列向量们从左到右组成，列向量的顺序按照$\hat{i},\hat{j},\hat{k}$（三维）的顺序。$\hat{i},\hat{j},\hat{k}$就是他们的单位向量，对应存在于我们的单位向量，x轴$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，y轴$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，z轴$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$上的投影。

为什么垂直正交？因为降维之后，要保证所有的子群都平等。

左乘再左乘是一个顺序改变的过程，

单次左乘可以看作是左边的方阵对右边的单列向量起到坐标投影映射的过程。

左边的方阵就是在我们的视角下看到的别人的基在我们的坐标下相对于我们的基的读数们。

基变换定义为：$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1 = p_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + p_{12}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + p_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n \\ y_2 = p_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + p_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + p_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \cdots \\ y_n = p_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + p_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + p_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n\end{cases}$

注意行列标与矩阵的线性方程组表示是转置关系。把$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$

这n个有序向量记作$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，

记n阶矩阵$\boldsymbol{P}=(p_{ij})$，利用向量和矩阵的形式，上式可表示为：

$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}$

简单说，一个方阵（基），等于另一个方阵（基）右乘一个方阵，那么坐标变换公式如下：

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\\vdots\\x'_n\end{pmatrix}$，反之$\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\\vdots\\x'_n\end{pmatrix} = \boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

基变换是右乘，且右乘的这个矩阵在线性方程组的右下角标行序号和列序号是转置的。原因就是要满足矩阵左乘的基础来源。$\boldsymbol{\beta}_1$是一个向量，并不是一个数值，这个向量是构成基的多个维度中的一个方向上的向量，它由过度矩阵$\boldsymbol{P}$.

基变换的底层逻辑就是在一个n维线性空间中，如果基，变成另一个基，那么过度矩阵必定是一个n维的方阵。这就是线性的真正意义。他不会导致升维和降维。

我之前在知乎看到一个博主将线性代数的基变换说成是旋转，然后继续左乘变换矩阵，我说左乘和右乘一定要注意，但是他仅仅是在过程当中，因为使用了旋转就认为简单的变换坐标而忽视了坐标变换的推导法则。没错，对于具体的问题，因为巧合而把过度矩阵直接由坐标写出，但是那是因为你用了我们视角下的默认基坐标（默认视角下的坐标，那组基）$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$去左乘了$\boldsymbol{P}$，当然没有任何变化。新的基让你忽略了右乘的普遍关系式，你也就学不到普适的精髓。也就压根儿没有探索触及到右乘的奥秘。

行列式的秩可以描述矩阵张成的空间是不是能够达到矩阵的维度，面积和体积的值可以描述被拉扯的大小。

说人话就是，如果你找到了一个方阵，可以将你现在视角下的基转换为别人视角下的基（用你的

基去右乘这个过度矩阵）。那么对方给的坐标，你用过度矩阵左乘就可以转换成你的视角下的读数。或者，你的坐标左乘过度矩阵的逆，就可以给他去读出你要表达的意思。