由泛函反观泰勒展开反观微分近似

小圆滚滚

1 泛函k阶接近

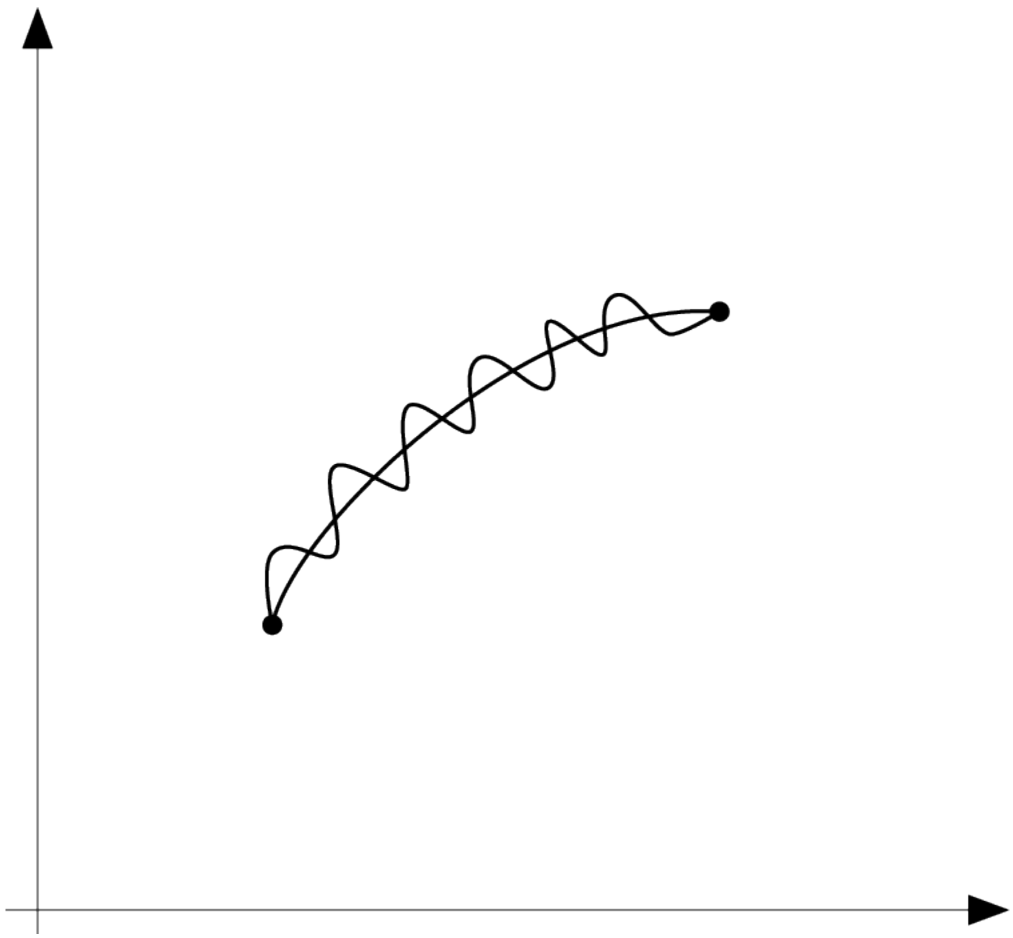

图 1: 零阶接近

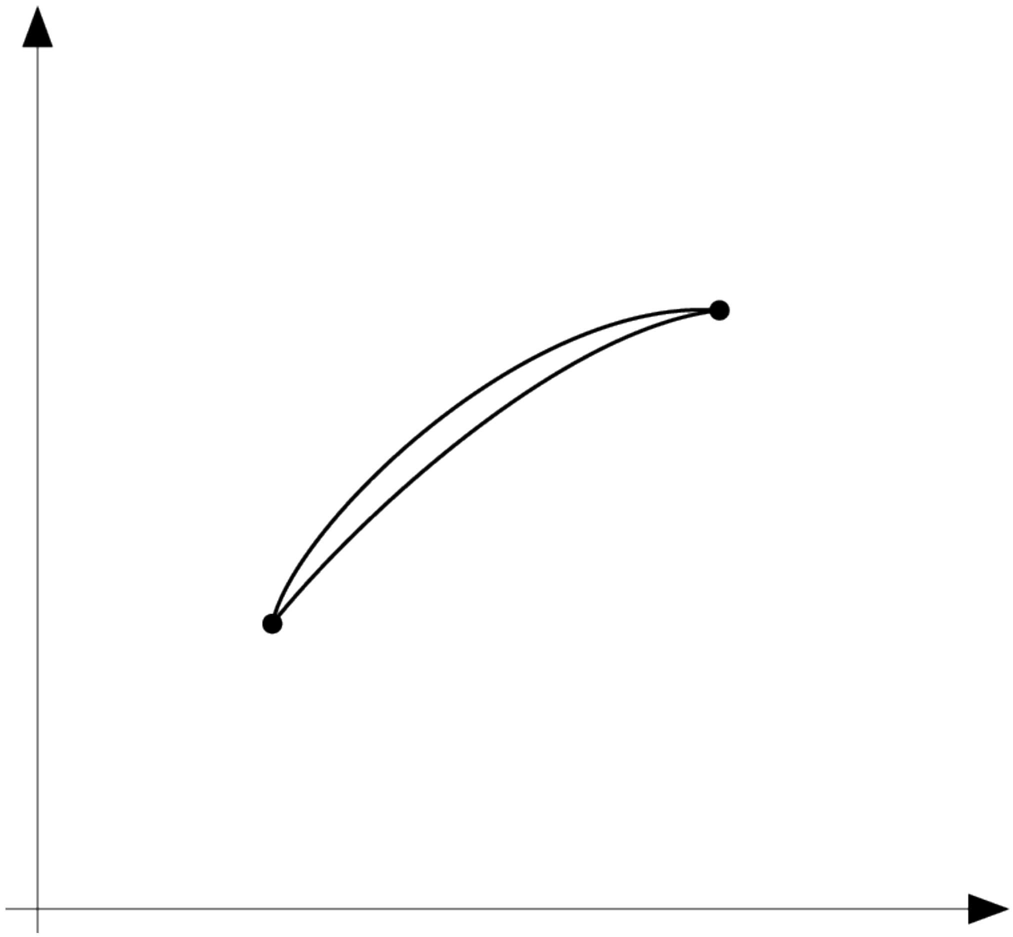

图 2: 一阶接近

图1中的曲线零阶接近，但是一阶不接近。而图2的曲线一阶接近。若曲线k阶接近，则在k以下的任意阶也接近。

2 近似有一阶变分足以

在局域范围内。或者用数学拓扑思维，邻域有两点取值相同（不用拉格朗日中值定理，用罗尔中值定理），那么必有切线水平，且水平点为极大值或极小值。

如果是函数，平滑不抖动，要么有极大值、要么有极小值就如同图2。不可能像正弦图像有两个极值的情况。

如同泛函的泰勒展开式的第二项就是一阶变分。将第一项移到等式左边，就可以知道近似值就是一阶变分。剩下的都是高阶无穷小。而这一阶变分正是近似的意义、正是微分的意义。正是导数的意义。

$y = x^2$正方形边长拓展一小段，那么这一小段的2倍就是面积增大的部分。而高阶无穷小（一小段的平方）可以忽略。函数y的三阶导不存在。此题完结。

$(x^3)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 = 3x^2$

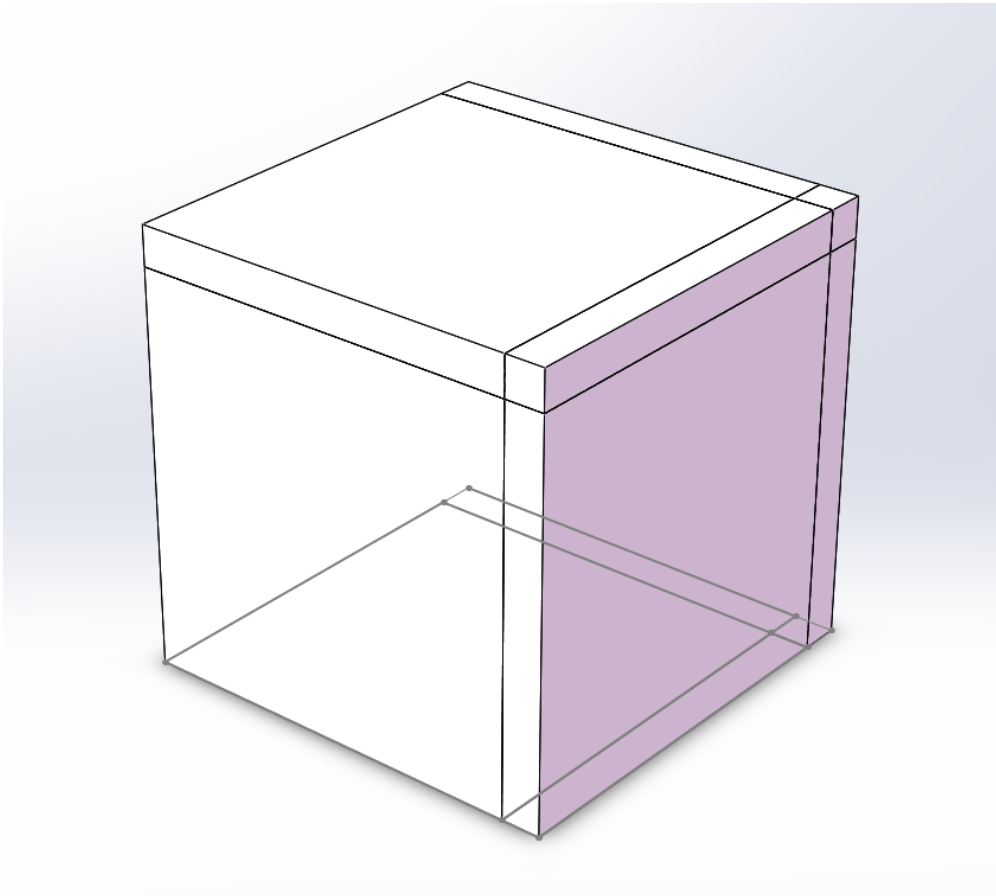

图 3: x的立方近似

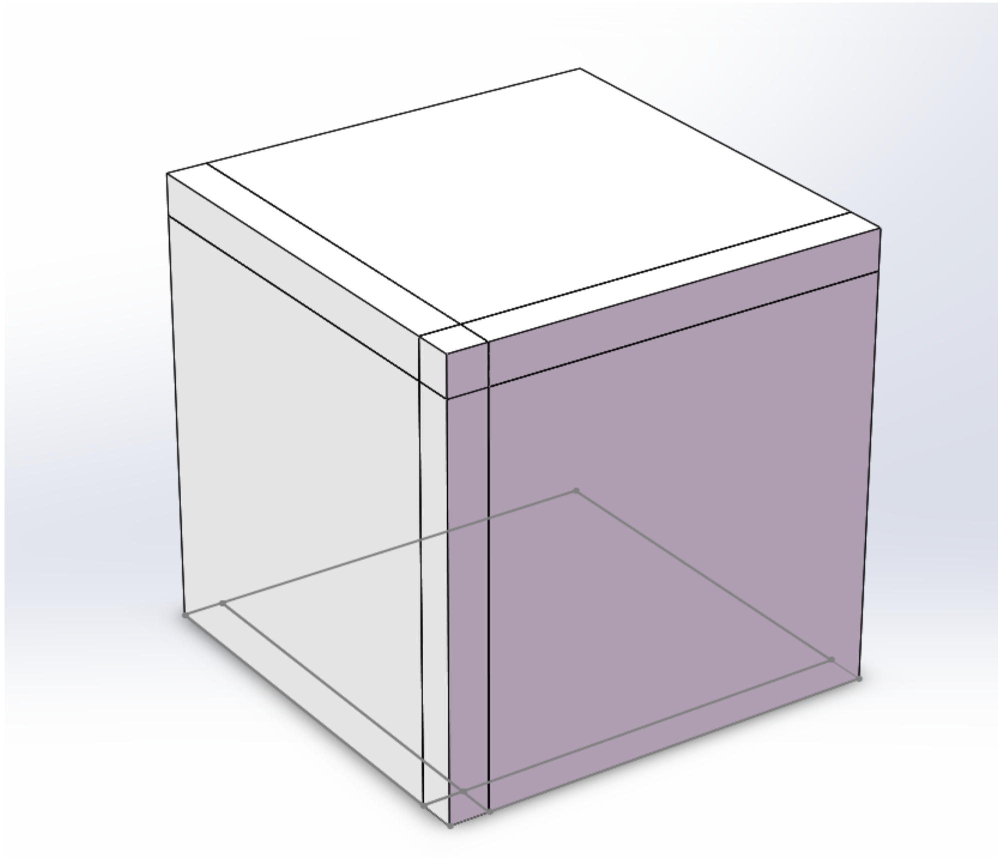

图 4: x的立方近似背面

很多现实物理问题，也就是从二维升到三维就结束了。而螺旋运动投影到平面，研究图2的形状，也就够了。

3 反观导数

用泰勒展开式来近似一个函数$f(x)$，也就是用泰勒展开式的前两项、前三项，来逼近$f(x)$在某一点x_0的值。

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$

上式第二项正是导数，等于等式左侧的真实值（函数在x_0的邻域$U(x_0)$的值，可以用(x_0)的值（主部）逼近）减去函数在(x_0)的值。如果是立方，就有第三项二阶导数的事。

例：$y = x^2$，在$x_0 = 100, \Delta x = x - x_0 = 10$的近似：

$f(110) = f(100) + f'(100)(10) + \frac{f''(100)}{2!}(10)^2 + \frac{f'''(100)}{3!}(10)^3 + \cdots$

$12100 = 10000 + 2 \times (100) \times 10 + \frac{2\times(100)}{2} \times (10)^2 + \frac{0}{3!}(10)^3 + \cdots$

$12100 = 10000 + 2000 + 100 + 0$

可以看出一阶导数（简称导数），高阶导数就是一阶的嵌套，等同于乘法。从泰勒展开式可以看出：

在x($x = x_0 + \Delta x$)点上的真实值(x)

$=$ 在x_0点上的真实值 $+$ 在x_0点上的导数$\times\Delta x$

$+ \ \frac{\text{在}x_0\text{点上的二阶导数}}{2!} \times \Delta x^2$

$+\frac{\text{在}x_0\text{点上的三阶导数}}{3!}\times\Delta x^3+\cdots$ ，当函数幂次为2时，等式右侧只有两项。第二项像不像一阶变分？导数是用来找到“线性近似”的数学工具。

真实值 = 基值 + 导数×增量（一阶变分、微分）

微分 = 导数×增量

真实值 $=$ 基值 $+$ 导数 $\times$ 增量 $+\frac{\text{二阶导}}{2!}\text{增量}^2+\frac{\text{三阶导}}{3!}\text{增量}^3+\cdots$

导数的本质，是一个比值、是一个极限。是一个因变量增长与自变量增长的比值的极限。

微分的本质，是一个线性近似的数值(线性主部)，是泰勒展开式中第二项，也是基值要加的第一项（线性项）。泰勒展开式中第三项系数是第二项的嵌套导数：y” = (y’)’。

4 微商

莱布尼兹发明这个导数记号的时候，还没有严格的导数的极限定义。莱布尼兹本人是把他的记号不严格的看成是两个「无穷小量」dy与dx的商，但这种看法并不能跟实数的公理相容，尽管莱布尼兹记号看起来像一个分数的形式，现在人们使用这个记号表示导数的时候，$\frac{dy}{dx}$是一个整体。不能把这个整体拆开就跟你不能把「导数」的「导」字拆成「巳寸」一样。

但在「非标准分析」里，dx, dy被视为「非标准实数」$^*\mathbb{R}$中的元素，$\frac{dy}{dx}$是在「非标准实数」$^*\mathbb{R}$上的做除法。dx被理解为「非标准分析」里的「无穷小量(infinitesimal)」。这种方法用严格的语言回到莱布尼兹的初衷。

所以当$v=\eta$,$du=\frac{d\eta}{dx}\cdot dx$，里面dx可以消掉。

所以有以下结论：

$\frac{dx}{dx}=1$

$\frac{dy}{dx}=y'$

$\frac{dy'}{dx}=y''$

当微商的分子（分数线上）不显示含有分母（分数线下）的时候，做偏微分就会等于0.$\frac{\partial F}{\partial x}=0$

5 链式法则

设$y=f(u)$，而$u=g(x)$且$f(u)$及$g(x)$都可导，则复合函数$y=f[g(x)]$的导数为

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$或$y'(x)=f'(u)\cdot g'(x)$.

导数定义 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Leibniz简写为$\frac{dy}{dx}$，并解释道：它是” 由x的变化而引起的y的无穷变化量”(dy)与“x 的无穷小变化量”(dx)的商。那么用这个记法就可以很好地体现出导数定义里商的形式了。

上述解释的关键在于：dy必须是因x改变了dx而引起的变化，这个记号才有意义

翻译一下就是：dy不能独立于x而变化！

反例其实很好找：

$y'(x)\cdot z'(t)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{y(x+h)-y(x)}{h}\lim\limits_{h\to 0}\frac{z(t+h)-z(t)}{h}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dz}{dt}$

此时dy是和t无关的，dz是和x无关的。

因此如果写成这样就肯定错了：

$\cancel{\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dz}{dt}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dz}{dx}}$

反过来，如果满足我们上述的条件，那么实际上它是可以作为“商”来处理的

注意：下面所有的推导都必须保证这个“商”所对应的极限必须存在！

比如我们熟悉的反函数求导：

$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

再比如链式法则：

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

注意：链式法则可以套娃。

还有由参数方程确定的函数的求导问题：

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$$

$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{dy}{dt}\right)\Big/\left(\frac{dx}{dt}\right)$

其反函数类似：

$\frac{dx}{dy}=\left(\frac{dx}{dt}\right)\Big/\left(\frac{dy}{dt}\right)$

这里与复合函数链式法则完全相同，由于dx, dy都是由t的变化而产生的无穷小量，因此仍然可以同时“乘”、“除”dt。

6 原函数与面积

牛顿搞物理研究，就是喜欢求导数。给位移求导数得到速度，给速度求导数得到加速度。搞数学研究也这么搞，他想给面积求下导数：

牛顿得出结论，**曲线下面到x轴围绕的面积的导数就是曲线，曲线的原函数的区间差就是面积。**

这里的面积个人觉得是面积值等于原函数在y轴的值的表达会更好

6.1 面积的导数就是曲线

牛顿由：

$A'(x)=\frac{dA(x)}{dx}=\frac{A(x+dx)-A(x)}{dx}=\frac{f(x)dx}{dx}=f(x)$

推出了微积分第一基本定理（英文教材是这么命名的，《高等数学》同济版称为积分上限函数的性质）：

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)dx=\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$

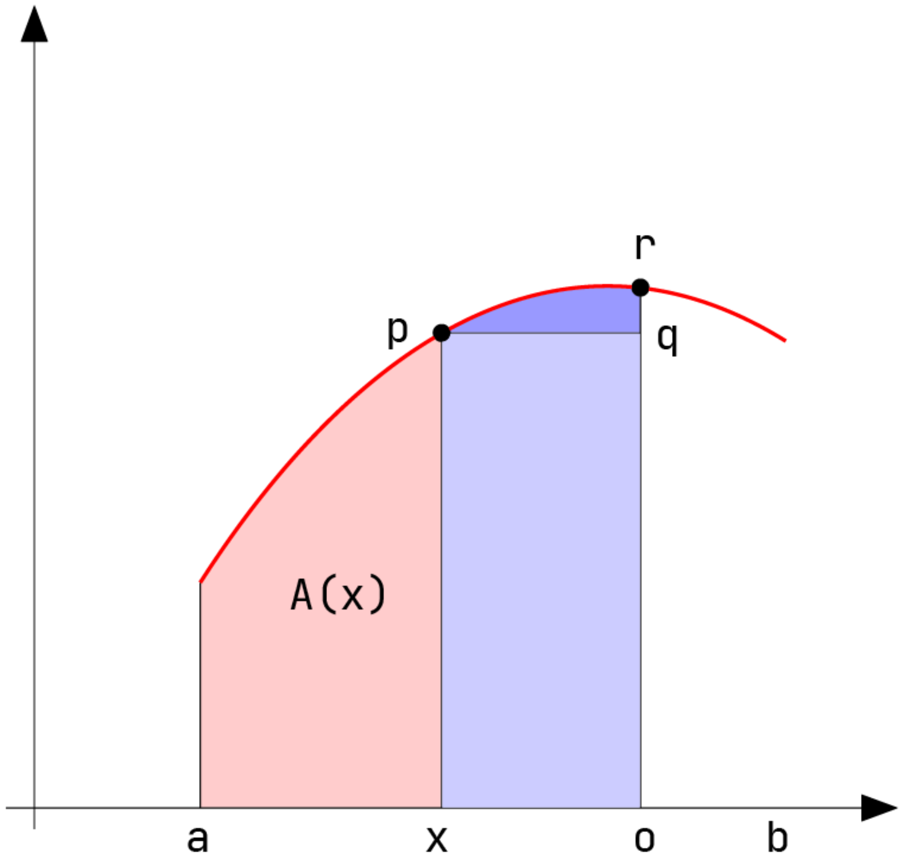

图 5: 对面积求导

新增的曲线下面积为浅蓝色部分（深蓝色部分是高阶无穷小）$A(x+dx)-A(x)=f(x)dx$
对其求导得f(x)
方法二：

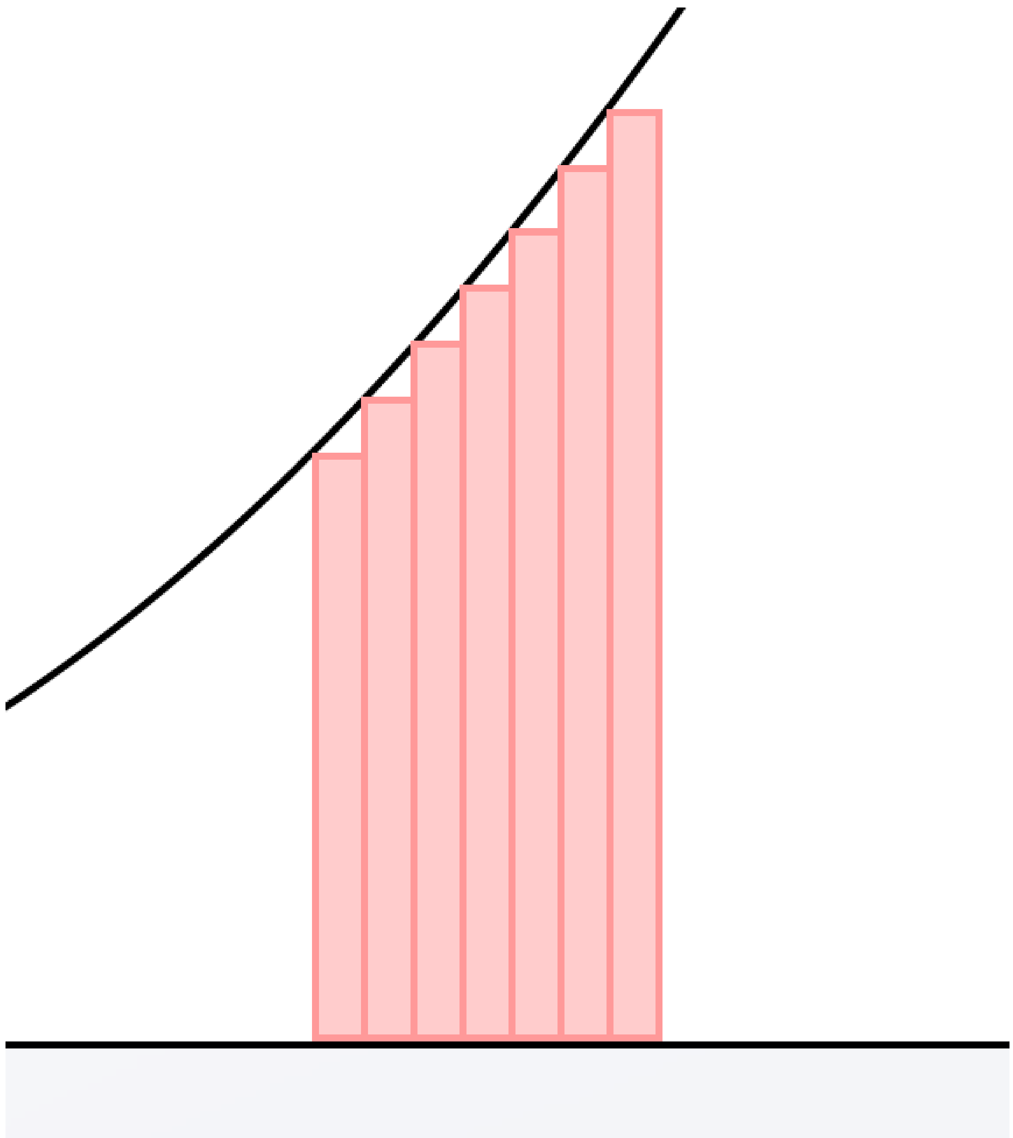

图 6: 函数的导数增加的面积

$f(b)-f(a)=\sum dy$，之前说过$dy=f'(x)dx$，所以有：

$f(b)-f(a)=\sum f'(x)dx$。

根据之前的描述，$f'(x)dx$表示的无限小矩形的面积，所以$\sum f'(x)dx$ 表示的是曲线$f'(x)$下面的面积.

坑：分清主次，可以知道f(b)点上的导数值乘以dx，也就是从左到右最后一条长条是不参与面积计算的。但是当dx足够小，或者b距离a足够远时，最后这一条长条可以忽略不计。这个忽略，和高阶无穷小的无穷小是不一样的。高阶无穷小在长条面积上面，那个空白的帽子。

坑2：为什么我们不能用圆和石头这种不能密铺的图形来进行微分。因为在侵占的同时，圆不能保证自己的失地比例，而长条的二分之一，每次都能增加步步为营。同理，我们不能用洋葱那样的环形来解释圆的微分。因为在变形的拉伸过程中，初学者不理解为什么长度可以柔性的互相抵消变形。

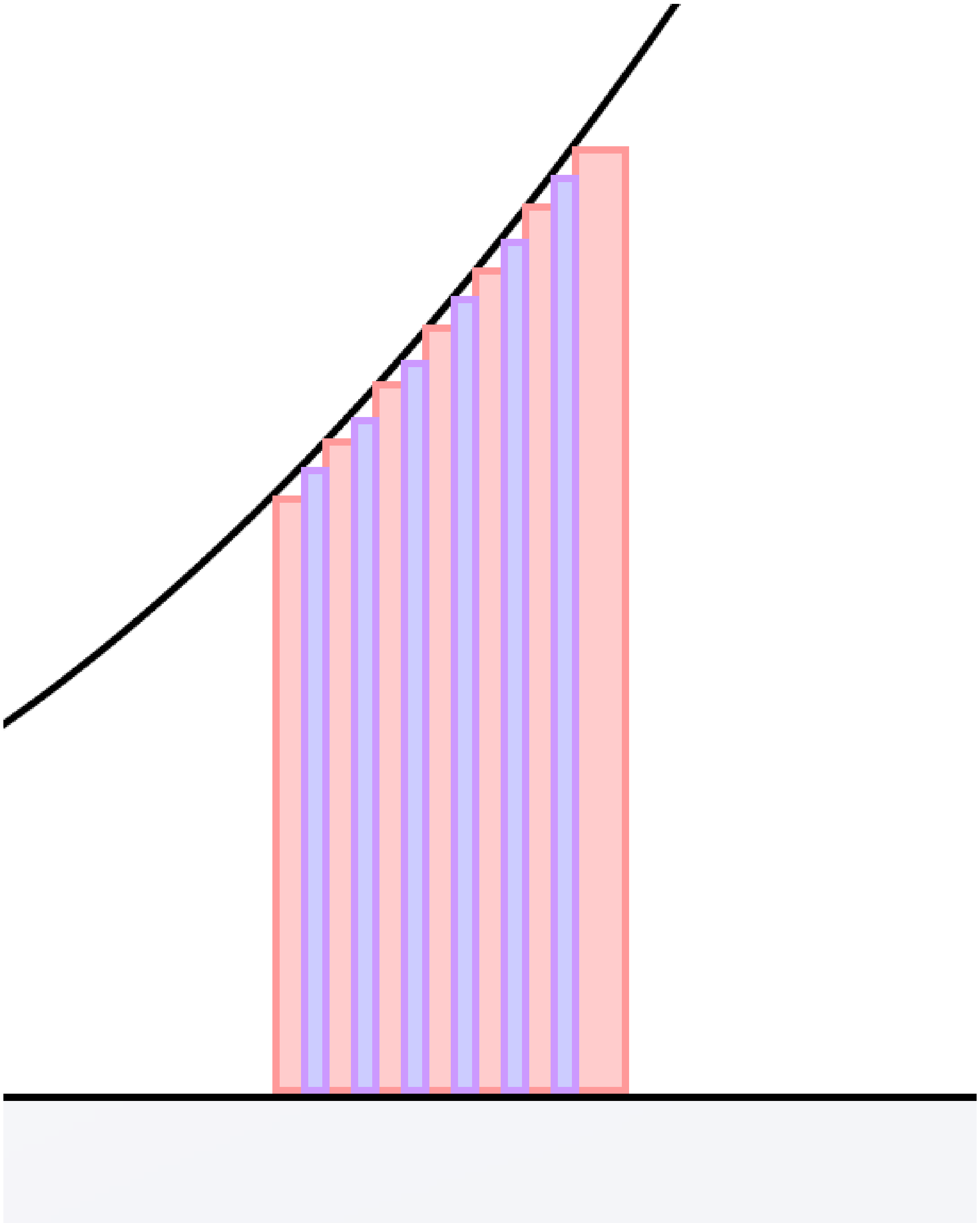

图 7: 真正的微分敢于从自身开始

6.2 乌鸦喝水

图片展示：

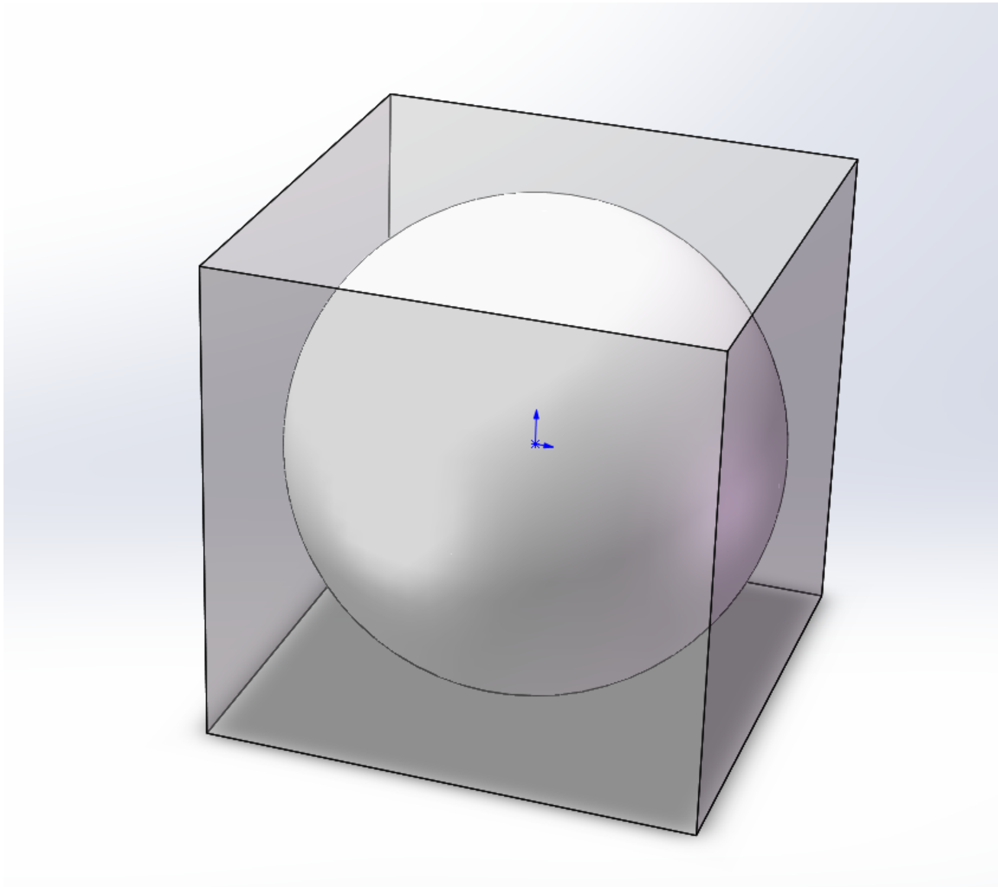

图 8: 一个球的体积

根据图片8可知一个球的体积 和它的容器的比例是：
$\frac{V_{球}}{V_{正方体}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{(2r)^3} = \frac{\pi}{6} = math.pi/6 \approx 0.5235987755982988$

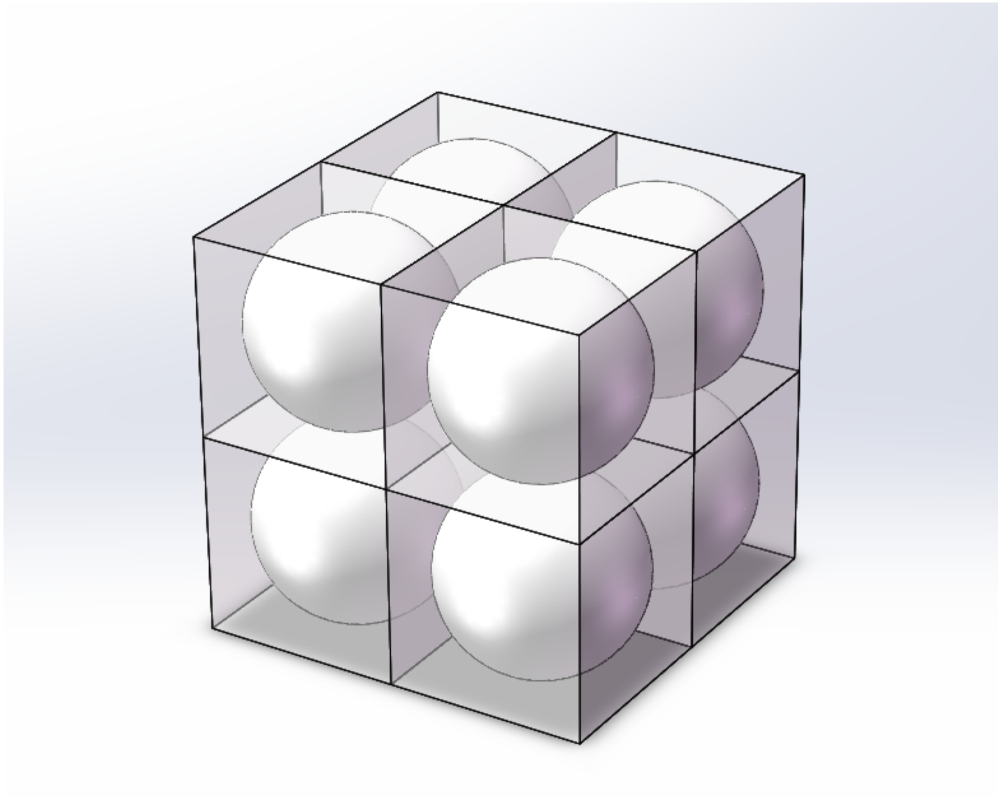

图 9: 四个球的体积

根据图片9可知四个球的体积和一个大容器的比例依然不变。

所以当瓶子里只有$1 - 0.5235987755982988 \approx 0.4764$瓶水或者更少的时候。填同样大小的圆形石子是无法喝到水的。

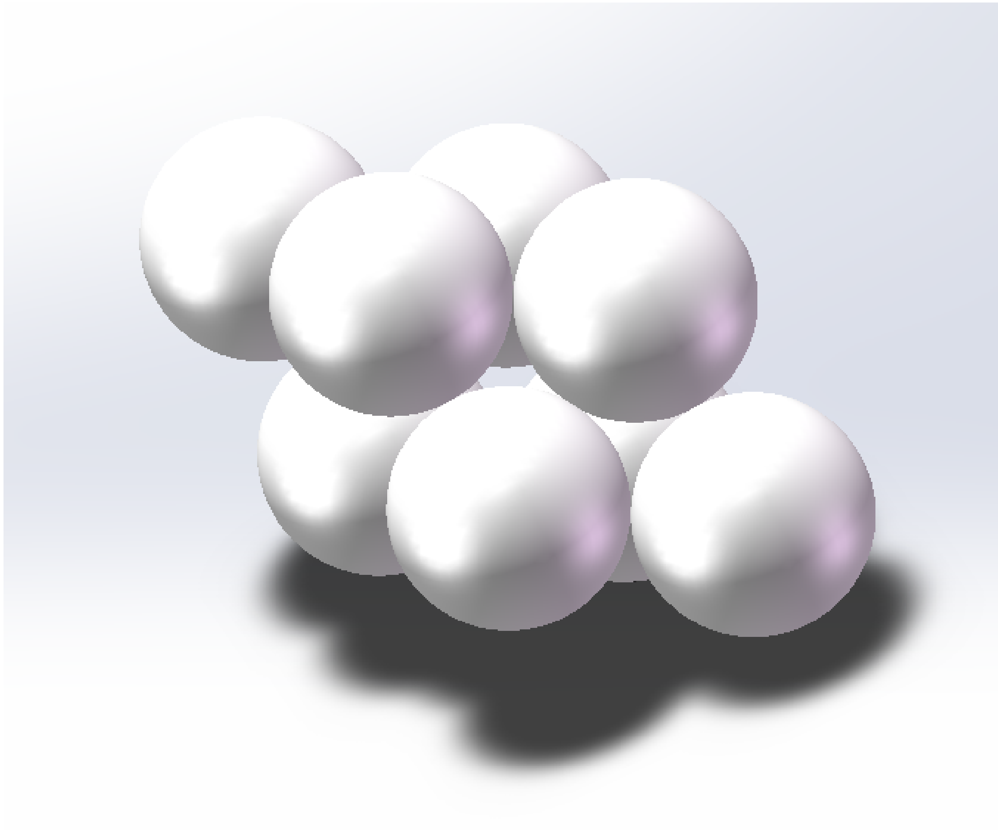

图 10: 四个球的体积2

根据图片10可知四个球的体积2和一个大容器的比例依然不变。有人会质疑这种结构。不用细算，也可只缝隙与球体的比例是固定的。所以球再小也不能使水面上升。

图片展示：

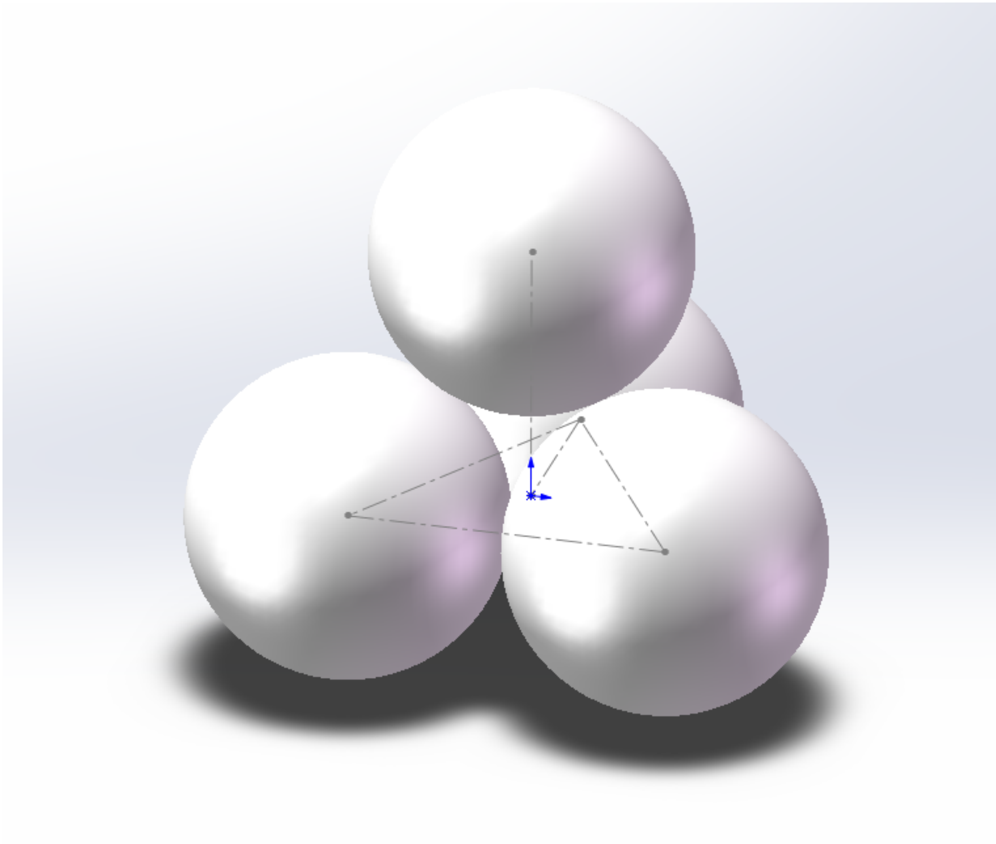

图 11: 四个球的体积2

好吧还是算一算吧：

菱形体底面中心点到顶点距离$dis = r/math.cos(math.pi/6) \approx 57.735026918962575$

菱形体地面的高菱$h_1 = l \times sin\frac{\pi}{3} = 100 * math.sin(math.pi/3) \approx 86.6$

菱形体高$h_2 = math.sqrt((2 * r) * *2 - (r/math.cos(math.pi/6)) * *2) \approx 81.64965809277261$

菱形体体积：$V = l \times h_1 \times h_2 = 100 * 86.6 * 81.65 \approx 707089.0$

球体体积：$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 4/3 * math.pi * (50 * *3) \approx 523598.7756$

523598.7755982988/707089.0 ≈ 0.740499110576319

所以当瓶子里只有0.2595瓶水或者更少的时候。填同样大小的圆形石子是无法喝到水的。

给一个“彩蛋”，以前我觉得积分上限函数很神奇，居然和积分下限没有关系。

改变积分下限会让原函数F(x)的曲线上下移动，我们知道有无数原函数，假设F(x)是原函数，那么F(x)+C（ C是常数）也是原函数。

6.3 定积分求面积就是导函数的原函数的区间差

上面6.1为什么叫做微积分第一基本定理？因为我们通过它推出了微积分第二基本定理，也就是牛顿-莱布尼兹公式。

$\int_c^d f(x)dx = A(d) - A(c)$

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b sin(x)dx = (-cosx)\Big|_a^b = -cosb - (-cosa)$

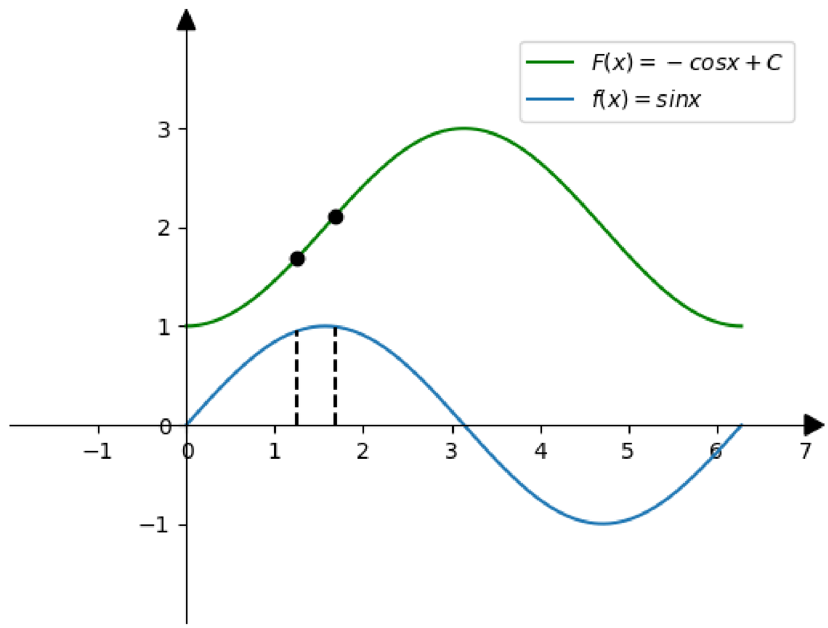

图 12: 面积与原函数

7 微分与积分

微分是除法、是因变量与自变量的比例、是切线的斜率，是可见割线到不可见理论的极致。

积分是乘法、可以是线段竖排排成排，然后以点成线的连续。也可以是面积向上堆叠成的体积（球体体积积分）、也可以是环带斜向上的连续缩口（球体表面积积分）

8 无穷小

既然无穷小可以比较，除了做差、做商也可以比较两个数的大小。

那么定义谁大谁小就很重要：

$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，那么就说$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，记作$\beta = o(\alpha)$；

$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，那么就说$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小；

$\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$，那么就说$\beta$与$\alpha$是同阶的无穷小；

$\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$，那么就说$\beta$是关于$\alpha$的k阶的无穷小；

$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，那么就说$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记作$\alpha \sim \beta$

可以看出，0、1、∞、c描述了基础的关系。在近似时，线性主部，只考虑到同阶无穷小。后面的所有高阶都将舍去。